



*Daniele Masi*

Il metodo delle reti di spinta per l'analisi limite  
di volte e scale in muratura

*Tesi di Dottorato*

*XXXI Ciclo*

*Tutor: prof. ing. Luciano Rosati*

Gennaio 2019

*A mio padre*

# Ringraziamenti

Giunto a conclusione del mio percorso di dottorato, desidero ringraziare alcune tra le persone che maggiormente hanno contribuito alla stesura del presente lavoro di tesi.

Non è la mera cortesia, né la volontà di uniformarmi alla naturale prassi di tali circostanze, a motivare queste poche righe, bensì la necessità di esprimere un sincero e tangibile segno di riconoscenza verso di loro.

Al prof. Luciano Rosati, innanzitutto, che mi ha introdotto allo studio di una tematica così affascinante e allo stesso tempo complessa, della quale avevo soltanto una vaga idea. Grazie a lui ho imparato a lavorare in qualsiasi condizione di "tempo", "luogo" e "azione", tanto per citare Aristotele, ma soprattutto ho imparato a lavorare al meglio delle mie possibilità.

All'ing. Francesco Marmo, senza il quale, ad essere sincero, non avrei neanche potuto muovere i primi passi nell'ambito di questa preziosa ricerca. Una persona che si fa apprezzare per le sue doti intellettuali ed umane, un serio punto di riferimento.

Ai miei colleghi dottorandi, assegnisti e ricercatori, con i quali ho avuto modo di condividere tutte le soddisfazioni e le naturali ansie di una così straordinaria professione.

Ai miei familiari e alla mia compagna, infine, per l'indispensabile supporto e la costante vicinanza.

Napoli, Gennaio 2019

DANIELE MASI

# Indice

<b>Indice</b>	<b>i</b>
<b>Elenco delle figure</b>	<b>iii</b>
<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 L'evoluzione storica delle strutture in muratura</b>	<b>5</b>
1.1 Dai massicci portali trilitici ai poliedrici archi in conci radiali . . .	5
1.2 Dalla tecnica delle false cupole alle grandi volte monumentali . . .	12
1.3 Dai rudimentali sistemi di massi sovrapposti alle scenografiche scale elicoidali . . . . .	17
<b>2 Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura</b>	<b>23</b>
2.1 Aspetti teorici della meccanica di archi e volte in muratura . . .	23
2.2 Teoria e tecniche costruttive delle scale in muratura . . . . .	33
2.3 Contributi recenti all'analisi di stabilità delle strutture in muratura	38
2.4 Analisi tramite membrane non reagenti a trazione . . . . .	43
<b>3 L'analisi tramite reti di spinta</b>	<b>49</b>
3.1 Condizioni di equilibrio delle reti di spinta . . . . .	49
3.2 Reti di spinta soggette ai carichi verticali . . . . .	55
3.3 Reti di spinta soggette ai carichi verticali e orizzontali . . . . .	60
<b>4 Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta</b>	<b>63</b>
4.1 Arco semicircolare in conci radiali . . . . .	63
4.2 Cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella . . . . .	68
4.3 Volta a crociera di Palazzo Camponeschi . . . . .	83

## Indice

---

4.4	Cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta . . . . .	91
4.5	Scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles . . . . .	96
4.6	Scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo . . . . .	102
4.7	Scala a tripla elica del Convento di San Domingos de Bonaval . .	107
4.8	Scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice . . . . .	112
4.9	Scala della Riconciliazione del Castello di Graz . . . . .	118
	<b>Conclusioni</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>127</b>

# Elenco delle figure

1.1	Portali trilitici di Stonehenge ad Amesbury . . . . .	6
1.2	Portale a pseudoarco per l'accesso al sito di Uxmal a Merida . . .	7
1.3	Arco semicircolare romano di Caparra . . . . .	8
1.4	Fitto sistema di archi rampanti nella Cattedrale di Notre-Dame di Parigi . . . . .	9
1.5	Portali polilobati nell'ambiente principale del Castello dell'Aljafería a Saragozza . . . . .	10
1.6	Archi a catenaria nei corridoi di Casa Milà a Barcellona . . . . .	11
1.7	Struttura a tholos micenea della Tomba di Agamennone . . . . .	12
1.8	Volta a tubi fittili del Tempio di Minerva Medica a Roma . . . . .	13
1.9	Cupole emisferiche della Chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli ad Istanbul . . . . .	14
1.10	Volte a crociera sulle navate laterali della Basilica di San Domenico Maggiore a Napoli . . . . .	15
1.11	Volte in folio del soffitto del New York Grand Central Terminal .	16
1.12	Resti delle prime scale in pietra rinvenuti nei Templi di Tarxien a Malta . . . . .	17
1.13	Scale circolari presenti all'interno delle torri sull'Isola di Andros .	18
1.14	Particolare dei gradini ritrovati all'interno del Tempio A di Selinunte . . . . .	19
1.15	Minareto al-Malwiya della Moschea di Jami al-Mutawakkil a Samarra . . . . .	20
1.16	Scala a chiocciola presente all'interno del Maschio Angioino a Napoli . . . . .	21
2.1	Anagramma sulla catenaria celato all'interno di una frase [Hooke, R., 1676 [60]] . . . . .	24

## Elenco delle figure

---

2.2	Estratto degli studi e delle ricerche sulla meccanica [De la Hire, P., 1729 [38]] . . . . .	25
2.3	Schema utilizzato per la perizia sulla cupola della Basilica di San Pietro a Roma [Poleni, G., 1748 [85]] . . . . .	26
2.4	Curve di minima e di massima spinta orizzontale identificate su un arco [Barlow, W.H., 1846 [16]] . . . . .	27
2.5	Estratto dell'analisi proposta da Young sul Telford Bridge di Birmingham [Huerta, S., 2008 [61]] . . . . .	28
2.6	Schema illustrativo del concetto di linea delle pressioni [Moseley, H., 1833 [79]] . . . . .	29
2.7	Tavole illustrative dell'analisi grafica di una volta a crociera [Wittmann, W., 1879 [108]] . . . . .	30
2.8	Tavole del progetto strutturale relativo al Ponte Mosca di Torino [Castigliano, A., 1879 [31]] . . . . .	31
2.9	Condizioni limite per i conci di un arco in muratura [Heyman, J., 1966 [57]] . . . . .	32
2.10	Illustrazioni relative al progetto della Torre di Cagli [Martini, G., 1490] . . . . .	33
2.11	Illustrazione della scala a doppia elica nel Castello di Chambord [Martini, G., 1490] . . . . .	34
2.12	Illustrazione di una scala aperta a sviluppo elicoidale [Violet-le-Duc, E.E., 1886 [106]] . . . . .	35
2.13	Modello di equilibrio per scale elicoidali immaginato come sovrapposizione di due sistemi di forze [Heyman, J., 1995 [59]] . . . . .	36
2.14	Parametri geometrici della rampa di una scala a sviluppo elicoidale [García Ares, J., 2007 [52]] . . . . .	37
2.15	Modello geometrico delle volte a crociera della Cattedrale di Colonia [Mark, R. et al., 1973 [70]] . . . . .	38
2.16	Percorso della potenza normalizzata dissipata per una volta a crociera [Milani, E. et al., 2008 [77]] . . . . .	39
2.17	Topologia della rete di spinta e soluzioni di equilibrio per una volta a botte e per una cupola sottoposte a carichi concentrati [O'Dwyer, D., 1999 [82]] . . . . .	40
2.18	Corrispondenze tra la griglia primaria e quella duale per una copertura tridimensionale [Block, P., 2009 [21]] . . . . .	41
2.19	Soluzione corrispondente al massimo moltiplicatore dei carichi orizzontali, con relativa funzione degli sforzi per una volta a padiglione [Lepore, N., 2018 [64]] . . . . .	42
2.20	Trasformazione del sistema di coordinate da cartesiano a curvilineo	43

---

**Elenco delle figure**

2.21	Tensioni membranali agenti su un elemento a guscio . . . . .	45
3.1	Esempio di rete di spinta per una cupola con oculo centrale . . .	50
3.2	Esempio di rete di spinta per una scala elicoidale con apertura centrale . . . . .	51
3.3	Ruolo del moltiplicatore di spinta $\zeta = 1/r$ all'interno di una rete elementare piana di forma triangolare . . . . .	53
3.4	Regione di influenza associata al generico nodo della rete . . . . .	54
4.1	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare <i>Arco 1</i> . . . . .	65
4.2	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare <i>Arco 2</i> . . . . .	65
4.3	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare <i>Arco 3</i> . . . . .	66
4.4	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare <i>Arco 4</i> . . . . .	66
4.5	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare <i>Arco 5</i> . . . . .	67
4.6	Vista panoramica della cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella a Napoli . . . . .	68
4.7	Ulteriore vista della cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella a Napoli . . . . .	70
4.8	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 1</i> . . . . .	73
4.9	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 1</i> . . . . .	73
4.10	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 2</i> . . . . .	74
4.11	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 2</i> . . . . .	74
4.12	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 3</i> . . . . .	75
4.13	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 3</i> . . . . .	75
4.14	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 4</i> . . . . .	76
4.15	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 4</i> . . . . .	76

## Elenco delle figure

---

4.16	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 5</i> . . . . .	77
4.17	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 5</i> . . . . .	77
4.18	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 6</i> . . . . .	78
4.19	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 6</i> . . . . .	78
4.20	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 7</i> . . . . .	79
4.21	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 7</i> . . . . .	79
4.22	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 8</i> . . . . .	80
4.23	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 8</i> . . . . .	80
4.24	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 9</i> . . . . .	81
4.25	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 9</i> . . . . .	81
4.26	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 10</i> . . . . .	82
4.27	Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Monteverginella 10</i> . . . . .	82
4.28	Modello geometrico della volta a crociera di Palazzo Camponeschi a L'Aquila . . . . .	83
4.29	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 1</i> . . . . .	85
4.30	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 2</i> . . . . .	86
4.31	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 3</i> . . . . .	87
4.32	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 4</i> . . . . .	88
4.33	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 5</i> . . . . .	89
4.34	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Camponeschi 6</i> . . . . .	90
4.35	Vista della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa	91

---

## Elenco delle figure

4.36	Sezioni della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa secondo i due assi principali e relativo sviluppo planimetrico [Sanpaolesi, P., 1959 [97]] . . . . .	92
4.37	Ricostruzione della forma originaria della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa [Sanpaolesi, P., 1959 [97]] . . . . .	93
4.38	Vista tridimensionale e dall'alto della soluzione di minima spinta orizzontale per la rete <i>Pisa</i> . . . . .	94
4.39	Sezioni trasversali lungo l'asse minore e lungo l'asse maggiore della soluzione di minima spinta orizzontale per la rete <i>Pisa</i> . . . . .	94
4.40	Vista tridimensionale e dall'alto della soluzione di massima spinta orizzontale per la rete <i>Pisa</i> . . . . .	95
4.41	Sezioni trasversali lungo l'asse minore e lungo l'asse maggiore della soluzione di massima spinta orizzontale per la rete <i>Pisa</i> . . . . .	95
4.42	Particolare della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles . . . . .	96
4.43	Sezione longitudinale e pianta della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles [Viollet-le-Duc, E.E., 1886[106]] . . . . .	97
4.44	Modello tridimensionale della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles . . . . .	98
4.45	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Saint-Gilles</i> . . . . .	100
4.46	Confronto tra il metodo delle reti di spinta e quello della membrana non reagente a trazione per una sezione particolare della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles . . . . .	101
4.47	Particolare della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula . . . . .	102
4.48	Ulteriore particolare della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula . . . . .	103
4.49	Modello tridimensionale della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula . . . . .	104
4.50	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Padula 1</i> . . . . .	105
4.51	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Padula 2</i> . . . . .	105
4.52	Vista dall'alto delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Padula 2</i> . . . . .	106
4.53	Vista dal basso della scala a tripla elica del Covento di San Domingos de Bonaval a Santiago de Compostela . . . . .	107
4.54	Particolare della scala a tripla elica del Covento di San Domingos de Bonaval a Santiago de Compostela . . . . .	108

## Elenco delle figure

---

4.55	Modello tridimensionale della scala a tripla elica del Convento di San Domingos de Bonaval a Santiago de Compostela . . . . .	109
4.56	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Bonaval</i> . . . . .	110
4.57	Vista dall'alto delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Bonaval</i> . . . . .	111
4.58	Ingresso della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli .	112
4.59	Particolare della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli	113
4.60	Modello tridimensionale della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli . . . . .	114
4.61	Pianta del primo e del secondo piano della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli . . . . .	115
4.62	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima spinta orizzontale per la rete <i>Sanfelice</i> . . . . .	116
4.63	Vista tridimensionale delle soluzioni di massima spinta orizzontale per la rete <i>Sanfelice</i> . . . . .	117
4.64	Particolare della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz .	118
4.65	Ulteriore particolare della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz . . . . .	119
4.66	Modello tridimensionale della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz . . . . .	120
4.67	Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete <i>Graz</i> . . . . .	121
4.68	Ingrandimento della soluzione di massima spinta orizzontale in corrispondenza della porzione più sollecitata della struttura per la rete <i>Graz</i> . . . . .	122

# Introduzione

La gran parte del patrimonio storico mondiale è costituita da costruzioni in muratura, generalmente realizzate tramite volte monumentali. Alcune di esse possiedono una geometria talmente complessa da rendere particolarmente onerosa l'applicazione delle moderne tecniche di analisi strutturale.

Peraltro esse sono intrinsecamente non lineari, attese le proprietà costitutive del materiale muratura, e affette da notevoli incertezze in considerazione del fatto che è molto difficile conoscere la reale geometria della struttura e del tutto velleitario valutare l'entità delle azioni e delle modifiche intervenute nel corso del tempo.

In questo contesto diventa sempre più stringente la necessità di sviluppare appropriati strumenti analitici capaci di mettere in condizione ingegneri ed architetti di comprenderne il reale, o quantomeno, un ragionevole grado di sicurezza strutturale.

Nonostante il crescente interesse da parte della comunità scientifica in merito a questo peculiare ambito di ricerca, spesso si assiste ad una palese mancanza di condivisione delle formulazioni e delle metodologie di analisi. La notevole difficoltà nell'approccio allo studio della muratura storica ha prodotto, infatti, una serie innumerevole di documentazioni, talvolta di grande pregio intellettuale, basata su indagini sperimentali.

Sulla scorta di alcune esperienze condivise, si sviluppano parallelamente diversi metodi numerici alle varie scale di osservazione, caratterizzati da un progressivo grado di specializzazione. Tali nuovi strumenti, sebbene non in grado di simulare scrupolosamente il comportamento di queste complesse strutture, forniscono comunque dei risultati apprezzabili, attese tutte le perplessità relative ad un materiale così disomogeneo.

Nelle costruzioni storiche, infatti, la reale geometria e le condizioni al contorno rappresentano dei fattori incogniti che è possibile valutare soltanto in modo approssimato; al contrario tali metodi necessiterebbero di un grado di detta-

## Introduzione

---

glio molto più elevato. Persino i parametri meccanici del materiale risultano di difficile definizione allo scopo di costituire un valido modello che rappresenti adeguatamente l'intera struttura.

Tutte queste complicazioni ed incertezze rendono singolarmente ardua la formulazione di adeguati criteri per la ricerca di soluzioni equilibrate di strutture particolarmente complesse come le volte e le scale elicoidali in muratura. È proprio la combinazione tra le complessità strutturali e geometriche a spingere verso la ricerca di approcci basati sugli aspetti teoretici dell'Analisi Limite.

Dunque si rinuncia deliberatamente a studiare in maniera precisa e rigorosa la risposta statica delle costruzioni storiche in muratura in relazione ai carichi esterni, al fine di privilegiare un punto di vista maggiormente indirizzato alla diretta determinazione delle configurazioni che inducono il collasso strutturale.

In tal senso, molti sono i risultati degli studi basati sull'applicazione del Teorema Statico dell'Analisi Limite, volti esplicitamente ad individuare i possibili stati di sforzo ammissibili in equilibrio con il sistema di azioni applicato. Questi, essenzialmente riconducibili a due grandi classi di soluzioni, al continuo e al discreto, ricercano le condizioni di equilibrio mantenendo, come filo conduttore, l'applicazione della teoria formulata da Heyman nel più generale ambito della Teoria della Plasticità.

I metodi al continuo per l'analisi di volte e scale in muratura consentono di trovare soluzioni in forma chiusa al problema, rivelandosi molto promettenti ai fini di una stima della capacità resistente della struttura per la quale vengono impiegati. Al contempo, questi sono generalmente caratterizzati da un notevole grado di complessità e di indeterminazione, soprattutto nella scelta della forma della membrana non reagente a trazione attraverso cui predisporre il modello geometrico.

I metodi al discreto finora sviluppati, invece, estendono il principio del poligono funicolare dei carichi allo spazio tridimensionale, configurando un problema di ricerca di un reticolo spaziale costituito esclusivamente da aste compresse ideali in equilibrio con i carichi esterni, interamente contenuto nello spessore della copertura. Questi forniscono una valutazione generale sulla sicurezza strutturale, ma allo stesso tempo producono risultati fortemente condizionati dalle scelte arbitrarie in fase di definizione preliminare del problema.

Al fine di superare alcuni dei limiti palesati all'interno delle formulazioni al discreto disponibili in letteratura, è stata fornita una recente riformulazione del metodo delle reti di spinta, che mira ad aumentare il grado di efficienza computazionale e ad estendere il campo di applicazione alle reti costituite da bordi non vincolati, anche in presenza di carichi orizzontali.

Il presente lavoro di tesi si inserisce nel contesto originato dai recenti sviluppi in tale direzione, allo scopo di validare ulteriormente l'analisi tramite reti di spinta sulla base della sua applicazione ad una classe di costruzioni murarie contraddistinta da una notevole complessità geometrica e strutturale: le volte e le scale elicoidali.

Il rapporto tra equilibrio e geometria viene, dunque, elevato a chiave di lettura principale nella verifica di stabilità delle costruzioni storiche in muratura, riscoprendo gli strumenti della statica grafica e aggiornandoli attraverso l'implementazione di procedure analitiche adeguatamente ottimizzate. Tali procedure consentono di ottenere risultati consistenti mediante l'impiego di una metodologia particolarmente versatile, in grado di mettere in stretta correlazione la stabilità di una struttura muraria unicamente con i suoi parametri geometrici.

La tesi è articolata in quattro capitoli, ognuno inerente ad un aspetto fondamentale del metodo di analisi proposto. Nel primo capitolo si delinea il percorso storico dell'evoluzione tipologica delle costruzioni in muratura, con particolare riferimento ad archi, volte e scale.

Il secondo capitolo presenta un dettagliato resoconto sui metodi di analisi finalizzati alla ricerca di soluzioni equilibrate per archi e volte in muratura, a partire dal modello catenario di Hooke, fino alla formulazione del Teorema Statico dell'Analisi Limite proposta da Heyman. Seguono una disamina dei contributi storici alla teoria tecnica delle scale in muratura e una descrizione accurata dei recenti approcci per l'analisi limite di volte e scale in muratura. Particolare attenzione viene posta alla formulazione del modello della membrana non reagente a trazione, poiché rappresenta una versione al continuo del metodo numerico presentato nel capitolo successivo.

La formulazione di un metodo di analisi basato sul concetto delle reti di spinta, obiettivo principale del lavoro di tesi, è presentata in dettaglio nel terzo capitolo, all'interno del quale vengono esplicitate le equazioni governanti e viene descritta la procedura analitica in grado di estenderne l'applicazione alle reti soggette sia a carichi verticali che orizzontali, anche in presenza di bordi non vincolati.

Le applicazioni presentate nel quarto capitolo, riguardanti sia strutture elementari, come ad esempio gli archi, sia casi più complessi, come volte e cupole di edifici monumentali del patrimonio storico italiano, mostrano le potenzialità e l'efficacia del metodo descritto nel capitolo precedente. Di particolare interesse sono, inoltre, le applicazioni allo studio dell'equilibrio di scale elicoidali in muratura. Queste ultime evidenziano la straordinaria capacità del metodo descritto nel comprendere il funzionamento statico di tali manufatti, tema attualmente oggetto di dibattito all'interno della comunità scientifica.



# Capitolo 1

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

### 1.1 Dai massicci portali trilitici ai poliedrici archi in conci radiali

Prima dell'invenzione dell'arco in muratura, il sistema di copertura maggiormente utilizzato era costituito da una traversa monolitica, chiamata architrave, sorretta da due sostegni verticali. Questo sistema era in grado di trasferire adeguatamente a terra le azioni verticali alle quali si trovava soggetto.

Il suo principale svantaggio era legato, però, alle caratteristiche meccaniche dei materiali utilizzati, che ne limitavano l'impiego per la copertura di grandi distanze. Per effetto dei carichi verticali, infatti, l'architrave si trovava soggetto ad uno stato di sollecitazione interna prevalentemente di tipo tagliente e flettente, con una distribuzione di tensioni di trazione al lembo inferiore che rendeva necessaria una limitazione della sua estensione [Caleca, L., 2000 [29]].

Preferire il legno alla pietra donava maggiore resistenza e versatilità all'intero sistema ma lo esponeva, al tempo stesso, a più repentini fenomeni di degrado ed usura, nonché ad un maggiore rischio di incendio. Uno degli esempi più celebri di tale sistema strutturale è rappresentato dai portali trilitici di Stonehenge ad Amesbury, cfr. figura 1.1.

Dal sistema trilitico si giunge alla vera struttura ad arco in conci radiali passando lentamente attraverso la realizzazione dei cosiddetti pseudoarchi, tra



Figura 1.1: Portali trilitici di Stonehenge ad Amesbury

le prime strutture curvilinee a consentire la copertura di luci importanti tramite l'accostamento di più elementi di dimensioni ridotte. A partire dai sostegni, questi venivano realizzati disponendo orizzontalmente elementi lapidei impilati uno sopra l'altro, leggermente sfalsati rispetto a quelli immediatamente sottostanti.

Dunque proseguendo in maniera simmetrica, dai lati del vano si copriva tutto lo spazio sotteso, scongiurando il collasso mediante l'apposizione di un elemento stabilizzante in sommità. Un esempio interessante di pseudoarco è rappresentato dal portale d'ingresso al sito Maya di Uxmal a Merida, cfr. figura 1.2.

Successivamente prende piede l'idea della vera struttura ad arco, costituita da una successione di elementi in pietra naturale, o artificiale, disposti in direzione radiale rispetto al centro. Tra i conci veniva generalmente posto in opera un letto di calce idraulica e malta cementizia, il cui compito, più che di incollarli tra loro, era quello di realizzare uno strato cuscinetto deformabile in grado di assorbire le irregolarità delle superfici adiacenti e facilitare la trasmissione degli sforzi interni.

La presenza del legante migliorava notevolmente il comportamento strut-



Figura 1.2: Portale a pseudoarco per l'accesso al sito di Uxmal a Merida

turale globale, aggiungendo benefiche forze di adesione alle naturali forze di attrito sviluppate tra i conci. Però tali elementi non erano in grado di sostenersi in modo indipendente, così diventava fondamentale la presenza di un concio in chiave che svolgesse una funzione attiva di trasferimento della spinta da una parte all'altra, equilibrando le reazioni vincolari sviluppate in corrispondenza degli appoggi.

Al fine di conferire maggiore robustezza all'intera struttura, riducendo contestualmente lo spessore dei giunti di malta, era possibile lavorare le pietre secondo opportune tecniche di stereotomia. Queste consentivano di ottenere degli elementi opportunamente squadri che si adattassero in maniera più naturale alla forma dell'arco, conducendo ad una migliore espressione della sua funzione statica mediante un perfetto combaciamento dei conci.

Con l'arco in muratura era finalmente possibile coprire luci nettamente maggiori rispetto a quelle garantite dal comportamento statico di una trave, utilizzando elementi di minore dimensione che, sebbene poco resistenti a trazione, erano capaci di sostenere adeguatamente l'intera struttura.

Le più antiche testimonianze in tal senso risalgono alle civiltà mesopotamiche, in particolare sono probabilmente i Sumeri i primi a farne uso per la copertura di luci di entità limitata [Benvenuto, E., 2006 [19]]. Successivamente

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

gli archi vengono adottati dalle popolazioni dell'antica Grecia, anche se queste ne fanno un uso alquanto limitato, preferendo il sistema trilitico a quello spingente nella realizzazione dei templi.

Dalle colonie greche dell'Italia meridionale, l'arco raggiunge ben presto ogni parte della penisola italiana. Non è chiaro se tale tecnica costruttiva fosse già conosciuta dai Romani per via dei frequenti scambi commerciali con la Grecia, o se questa fosse stata trasmessa loro dagli Etruschi durante il periodo di dominazione, fatto sta che è proprio a loro che si deve la sua grande e capillare diffusione.



Figura 1.3: Arco semicircolare romano di Caparra

marginali col passare del tempo, salvo poi essere ripresa dall'architettura romana e da quella rinascimentale, affiancata a tecniche costruttive più evolute. Un mirabile esempio di arco semicircolare è rappresentato dall'Arco di Caparra in Spagna, cfr. figura 1.3.

Inizia ben presto a diffondersi l'impiego dei mattoni in pietra artificiale, realizzati in laterizio e caratterizzati da una maggiore resistenza all'usura. Inoltre l'utilizzo del laterizio permetteva di frazionare l'arco in elementi di dimensioni particolarmente ridotte, svincolandosi dalla profondità imposta dal concio di

Infatti è con l'espansione dell'Impero che questo elemento architettonico comincia ad essere veicolato, dapprima nel bacino del Mediterraneo, successivamente in tutta l'Europa centro-settentrionale. Uno dei simboli della cultura tecnica romana è indubbiamente l'arco semicircolare a tutto sesto, nel quale la curva d'intradosso è rappresentata da una semicirconferenza con centro giacente sulla linea di imposta.

Questa era anche la forma d'arco che implicava le maggiori azioni spingenti, tanto da essere relegata progressivamente a ruoli sempre più

pietra naturale, anche se ciò imponeva la presenza di una maggiore quantità di legante.

Una variante interessante dell'arco semicircolare è quella nella quale la circonferenza possiede il centro al di sotto della linea d'imposta. Questo cosiddetto arco ribassato, particolarmente spingente, veniva principalmente utilizzato per creare passaggi di dimensioni contenute all'interno delle pareti murarie durante il periodo medievale.

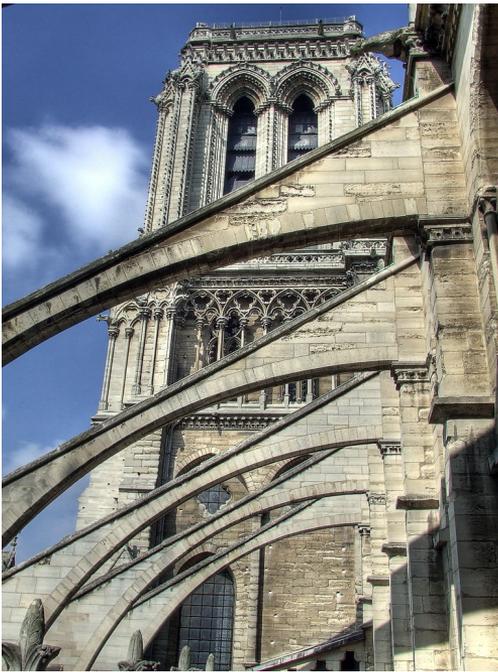


Figura 1.4: Fitto sistema di archi rampanti nella Cattedrale di Notre-Dame di Parigi

l'arco rampante, un caso particolare di arco asimmetrico utilizzato per scaricare, lungo il perimetro di una struttura, le spinte orizzontali delle volte e degli archi ogivali presenti.

Proprio per questa sua particolare funzione di sostegno e contropinta veniva frequentemente utilizzato all'esterno delle grandi cattedrali gotiche, come Notre-Dame di Parigi, con la chiara funzione di raccordo ai contrafforti, cfr. figura 1.4.

L'arco ribassato policentrico è costruito, invece, a partire da due archi di circonferenza aventi origine sulla linea di imposta e raggio inferiore alla metà della luce, entrambi raccordati in chiave da un terzo arco di circonferenza con origine al di sotto della linea di imposta, in posizione centrale.

Anche questa tipologia di arco veniva impiegata, principalmente durante il periodo tardo-medievale, allo scopo di costituire aperture nelle pareti murarie, generalmente di più ampio respiro rispetto all'arco ribassato monocentrico. Una sua variante tipica dell'architettura inglese del XVI secolo è costituita dall'arco Tudor, costruito a partire da quattro centri ed ottenuto mediante due curve raccordate attraverso due tratti rettilinei intersecanti in chiave.

Simbolo inconfondibile dell'architettura gotica è sicuramente

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

È doveroso puntualizzare, però, come il concetto di arco in muratura non fosse affatto sconosciuto al mondo arabo, che ne aveva già profonde cognizioni. Qui è particolarmente diffusa la forma d'arco a ferro di cavallo, generalmente utilizzata per la realizzazione di ampi e maestosi portali d'ingresso nelle moschee. Questo è caratterizzato da una linea di intradosso formata da una o due semicirconferenze i cui centri sono posizionati al di sopra della linea di imposta, mentre le sezioni alle reni giacciono sulla retta a cui appartiene il centro della semicirconferenza.

Variante molto particolare, spesso impiegata allo stesso scopo, è l'arco polilobato, del quale un magnifico esempio è riscontrabile all'interno degli ambienti del Castello dell'Aljafería a Saragozza, cfr. figura 1.5.



Figura 1.5: Portali polilobati nell'ambiente principale del Castello dell'Aljafería a Saragozza

Si ritiene molto probabile che anche l'arco a sesto acuto possa essere stato introdotto dall'architettura islamica durante il periodo medievale, rappresentando, successivamente, una delle forme maggiormente diffuse ed apprezzate in tutto il mondo.

La sua curva d'intradosso è descritta da un arco a sesto rialzato ottenuto mediante due archi di circonferenza con raggio maggiore della metà ma minore dell'intera luce, che vanno ad intersecarsi in chiave formando una cuspide ad

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

un'altezza maggiore della semicorda; la posizione dei centri delle circonferenze che lo compongono ne determinano la forma più o meno allungata.

L'arco a sesto acuto veniva, dunque, utilizzato di frequente per la realizzazione di cattedrali e abbazie in stile gotico, per via della sua naturale capacità di fornire una maggiore verticalità da sfruttare per accrescere l'aspetto simbolico-religioso. Dal punto di vista prettamente strutturale l'arco a sesto acuto riusciva ad indurre un'azione spingente decisamente minore rispetto ad altre forme, consentendo l'utilizzo di sostegni più snelli.

Una sua particolare variante è l'arco inflesso, che presenta una curva di intradosso ottenuta come successione di quattro archi di circonferenza alternati in andamento concavo e convesso.

L'utilizzo sistematico degli archi in muratura si prolunga fino alle soglie del XX secolo, riducendosi progressivamente in favore di tecniche riguardanti l'impiego dei cosiddetti materiali moderni, quali acciaio e calcestruzzo armato.

È possibile, però, trovare ancora straordinari esempi di questa particolare soluzione costruttiva nelle opere di Gaudí, che utilizza in modo decisamente magistrale la tipologia di arco a catenaria, la cui caratteristica principale è quella di avere una distribuzione del peso perfettamente uniforme ed esprimibile tramite il coseno iperbolico. In tal senso risultano celebri e inimitabili gli archi di Casa Milà a Barcellona, cfr. figura 1.6.

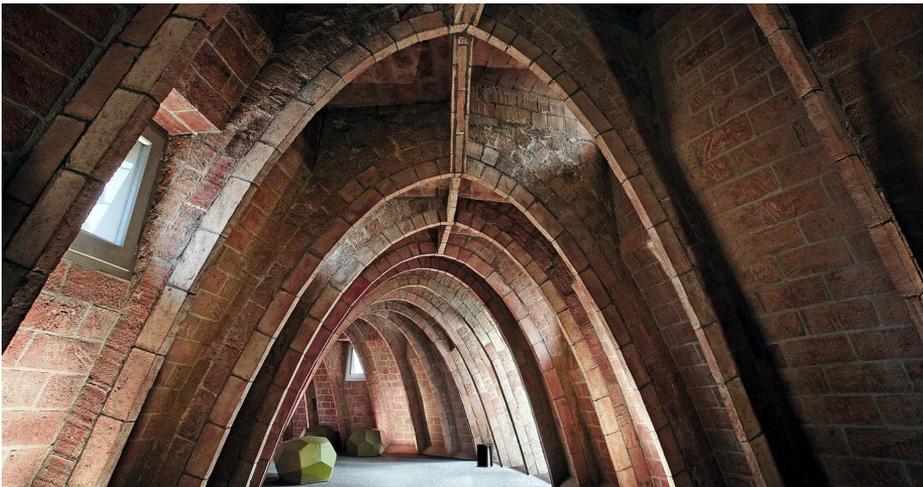


Figura 1.6: Archi a catenaria nei corridoi di Casa Milà a Barcellona

## 1.2 Dalla tecnica delle false cupole alle grandi volte monumentali

Secondo il parere di molti illustri storici dell'architettura, la teoria tecnica della volta in muratura nasce in concomitanza dell'avvento della civiltà romana, che la utilizza in maniera particolarmente sapiente ed estensiva. Ad onor del vero è necessario ricordare che alcuni primitivi esempi di cupole in argilla mista a ciottoli, le famose Case di Choirokoitia, venivano realizzate a Cipro già nel IV secolo a.C., e che diverse tracce di false cupole in muratura, probabilmente risalenti al III millennio a.C., sono state rinvenute lungo tutto il bacino mesopotamico.



Figura 1.7: Struttura a tholos micenea della Tomba di Agamemnone

Tali semplici strutture, utilizzate per lo più a copertura di piccoli ambienti, seguivano la stessa logica costruttiva dei falsi archi. In tal senso un esempio di grande rilevanza architettonica, attribuibile alla civiltà micenea, è rappresentato dalla struttura a tholos della Tomba di Agamemnone, cfr. figura 1.7.

In epoca romana le false cupole lasciano spazio a vere e proprie strutture voltate, frutto di un'evoluzione inarrestabile delle tecniche costruttive, nonché di un impiego sempre più consapevole dei materiali da costruzione. Queste venivano utilizzate per la copertura di grandi ambienti, e realizzate grazie all'ausilio di una sorta di calcestruzzo primitivo costituito da una mescolanza di malta e pietre grezze o frammenti di pietra. La malta era a sua volta composta da calce mescolata con sabbia o pozzolana.

L'esigenza di realizzare strutture quanto più possibilmente leggere e funzionali conduce ad un'ulteriore affinazione dell'*opus caementitium*. Le grandi volte cominciano ad essere costruite seguendo una logica ben precisa, risultato di sperimentazioni sul campo e di studi

approfonditi sulla statica di tali strutture. Si poteva far variare la densità del materiale predisponendolo in modo tale che questo risultasse più compatto nelle zone maggiormente sollecitate dagli sforzi. Ulteriormente viene contemplata la possibilità di utilizzare varie tipologie di materiale nella stessa costruzione.

Significativo in tal senso è l'impiego dei cosiddetti tubi fittili, ossia delle strutture tubolari cave in laterizio, incastrate una sull'altra e disposte in posizione verticale lungo cerchi concentrici [Como, M., 2016 [33]]. Questa tecnica consentiva un notevole alleggerimento complessivo della volta, che risultava comunque ben stabile. Un mirabile esempio di cupola realizzata attraverso l'ausilio di tubi fittili è il Tempio di Minerva Medica a Roma, cfr. figura 1.8.



Figura 1.8: Volta a tubi fittili del Tempio di Minerva Medica a Roma

La tipologia strutturale più fortemente caratterizzante la cultura tecnica romana è indubbiamente la volta a botte, contraddistinta dalla più semplice geometria, sviluppata a partire da una successione di archi affiancati impostati su due muri paralleli. Questa particolare copertura risultava di uso comune soprattutto in ambienti dalla forma allungata, ai quali pareva adattarsi con grande flessibilità. Le volte a botte venivano costruite partendo proprio dalla realizzazione di archi in pietra o in laterizio posti a distanze regolari, che asservivano alla funzione di supporto sia in fase di esecuzione che in condizioni di esercizio.

In epoca bizantina iniziano a diffondersi le cupole emisferiche a direttrice circolare, non più impostate sul tamburo poligonale, bensì sostenute dall'azione di massicci pilastri collocati alla base. Questo nuovo modo di costruire le coperture influiva notevolmente sulla capacità di edificare ambienti sempre più aperti e suggestivi, fortemente simbolici, utilizzati spesso all'interno di edifici religiosi [Di Pasquale, S., 1996 [40]].

Dunque le cupole vengono realizzate in muratura di laterizio, abbandonando definitivamente l'opus caementitium romano assieme al concetto di struttura per concrezione da esso derivata. Un grandioso esempio di tale contesto, particolarmente ricco di peculiari innovazioni architettoniche, è la Chiesa di Santa

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

Sofia di Costantinopoli ad Istanbul, dove una grande importanza viene data alla tecnica stereotomica, cfr. figura 1.9.



Figura 1.9: Cupole semisferiche della Chiesa di Santa Sofia di Costantinopoli ad Istanbul

Sono le difficoltà economiche che caratterizzano sostanzialmente tutto il periodo medievale a spingere inevitabilmente verso la realizzazione di coperture sempre più leggere e facilmente assemblabili, in grado di ridurre significativamente l'onere di cantiere. Si diffonde l'utilizzo del laterizio e del pietrame, dunque le volte non presentavano più quella struttura pesante e compatta, caratteristica della tecnica romana, ma si configuravano come costruzioni in grado di assecondare gli assetamenti differenziali delle fondazioni attraverso piccoli movimenti relativi tra i conci.

La tipica copertura medievale è rappresentata dalla volta a crociera, utilizzata di frequente nelle spettacolari cattedrali gotiche alle quali era in grado di donare eleganza e arditezza. Ovviamente il prezzo da pagare per l'utilizzo di strutture così snelle era la presenza di una fitta sequenza di archi rampanti esterni, capaci di trasferire le spinte ai contrafforti [Giuffré, A., 1991 [56]].

Varianti tipiche della volta a crociera sono caratterizzate da assetti rialzati o ribassati, a seconda della posizione del suo colmo in relazione alle quote delle chiavi degli archi perimetrali. Un esempio rilevante di volta a crociera classica,

impostata su archi a sesto acuto, è riscontrabile nella copertura delle navate laterali della Basilica di San Domenico Maggiore a Napoli, cfr. figura 1.10.

A partire dal XV secolo si verifica una sostanziale riscoperta della tecnica romana, tanto che le cupole e le volte a vela sostituiscono progressivamente le volte a crociera sia all'interno degli edifici religiosi che in quelli ad uso civile. Ovviamente tale riscoperta andava di pari passo con un'evoluzione delle tecniche costruttive che contemplavano, ormai, un abbondante uso del laterizio come elemento costitutivo di base.

La cupola torna ad essere l'elemento architettonico cardinale all'interno degli edifici religiosi, dalle chiese più modeste alle più imponenti cattedrali. A questa si affianca una tipologia facilmente ottenibile da un suo ideale sezionamento mediante quattro piani verticali, condotti rispettivamente dai lati di un quadrato inscritto nel cerchio di base: la volta a vela. Questa si adattava particolarmente bene come copertura dei lunghi portici nei chiostri degli edifici religiosi [Borri, A., & Bussi, L., 2001 [24]].

Un'ulteriore tipologia strutturale di grande pregio artistico era la volta a padiglione, che veniva utilizzata all'interno degli ambienti particolarmente eleganti e raffinati delle residenze reali o dei musei. È bene sottolineare come la volta a crociera e quella a padiglione si ottengano dalla combinazione di due volte a botte ortogonali tra loro, per semplice unione o intersezione di volumi. Tale costruzione geometrica è in grado di formalizzare delle superfici formate rispettivamente dall'insieme di quattro unghie e di quattro fusi simmetrici.

I tempi moderni sono caratterizzati dalla figura di spicco di Guastavino, che verso la metà del XIX secolo, rielaborando la tecnica tradizionale di costruzione delle volte catalane, formalizza una particolare tipologia di volta composta da

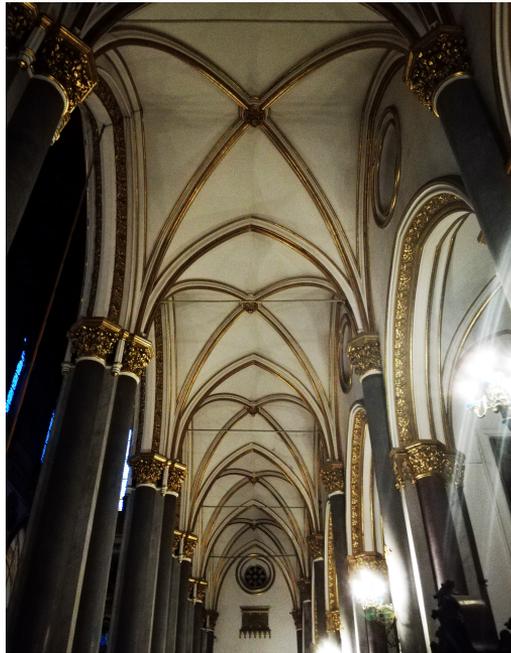


Figura 1.10: Volte a crociera sulle navate laterali della Basilica di San Domenico Maggiore a Napoli

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

strati di elementi piatti, generalmente realizzati in terracotta, fra i quali interporre un letto di malta. Le cosiddette volte in folio, così realizzate, presentavano una struttura particolarmente snella e di notevole pregio artistico ed estetico. Probabilmente uno dei più peculiari esempi di volta alla Guastavino è quella presente nel Grand Central Terminal di New York, cfr. figura 1.11.

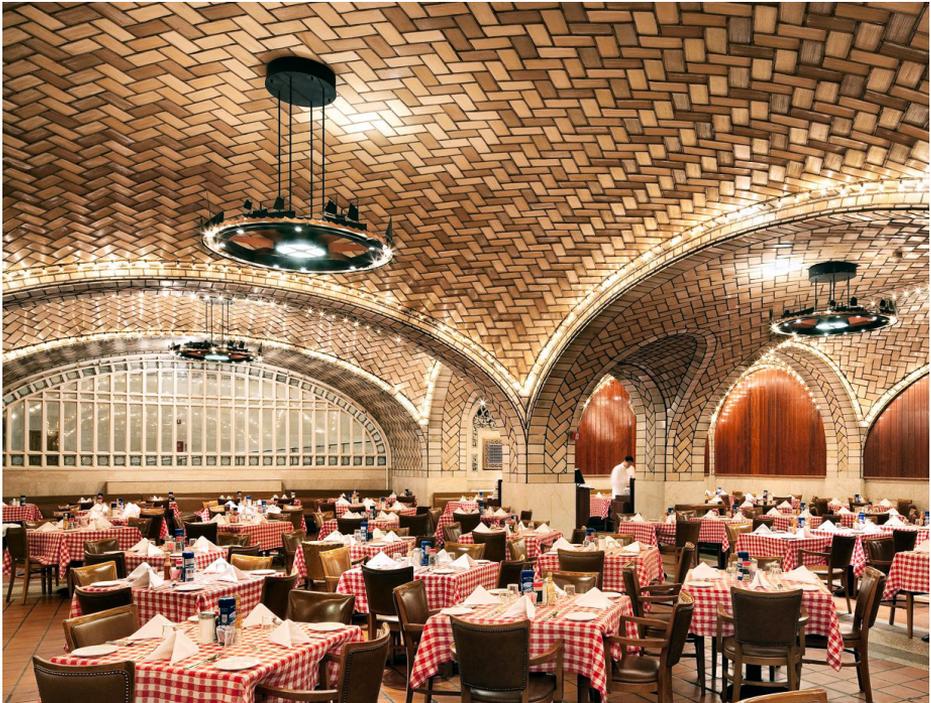


Figura 1.11: Volte in folio del soffitto del New York Grand Central Terminal

### 1.3 Dai rudimentali sistemi di massi sovrapposti alle scenografiche scale elicoidali

Le scale in muratura rappresentano da sempre una delle sfide più impegnative e stimolanti per l'uomo, che le realizza già all'interno dei primi insediamenti preistorici del IV millennio a.C., come riscontrabile dai resti rinvenuti nei Templi di Tarxien a Malta, cfr. figura 1.12. Queste erano delle semplici strutture costituite da blocchi rettangolari opportunamente sagomati e posti in opera tra massicci muri megalitici.

Alcune delle più imponenti costruzioni ascrivibili alle civiltà del III millennio a.C. contemplavano la presenza di scale cerimoniali, per lo più utilizzate per raggiungere gli ambienti interni dedicati ai rituali religiosi. Infatti, sebbene alcune piramidi fossero di per sé costituite da enormi scalinate di gradoni esterni, queste presentavano scale praticabili soltanto al loro interno, progettate e costruite per formare un intricato dedalo di rampe rettilinee in grado di consentire l'accesso alle tombe dei faraoni. Scale in muratura esterne venivano, invece, impiegate nell'edilizia civile con lo scopo di realizzare strutture stabili per il collegamento tra i vari piani delle abitazioni.

Il concetto di scala come struttura celebrativa non è particolarmente preminente nell'architettura egizia, anche se è necessario sottolineare come il primo esempio significativo di tale tipologia strutturale, databile intorno al II millennio a.C., si trovi nel complesso dei Templi di Deir el-Medina nell'odierna Luxor. Intorno al I secolo a.C. le scale in muratura cominciano a diffondersi lungo le sponde del Nilo, asservendo alla funzione di misurazione del livello del fiume.

Emblematiche testimonianze risalenti al periodo ellenistico possono essere

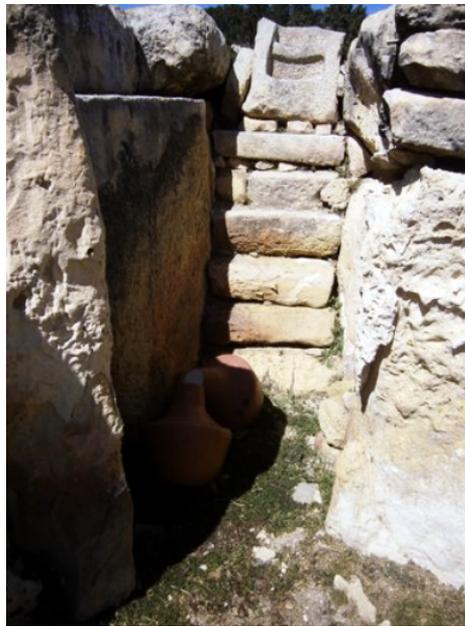


Figura 1.12: Resti delle prime scale in pietra rinvenuti nei Templi di Tarxien a Malta

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

osservate sulle isole di Naxos e Andros, nelle Cicladi, dove sono perfettamente conservati i resti di due costruzioni a sviluppo elicoidale incassate tra le pareti interne di due torri circolari, incredibilmente sprovviste di supporto visibile, cfr. figura 1.13. Altri ritrovamenti simili, dei quali rimangono soltanto le fondamenta, sono stati effettuati nelle zone dell'Attica, dell'Asia Minore e della Crimea.



Figura 1.13: Scale circolari presenti all'interno delle torri sull'Isola di Andros

Gran parte dell'architettura formale greca si estendeva principalmente al piano terra, che veniva rialzato per mezzo di scalinate esterne in pietra concia, generalmente dotate di sviluppo rettilineo. I templi della Grecia occidentale, invece, principalmente quelli presenti nelle colonie dell'Italia meridionale, possedevano delle insolite coppie di scale gemelle poste ai lati della porta d'ingresso; si ritiene che la loro funzione fosse quella di fornire l'accesso allo spazio superiore del tetto, per scopi rituali o per semplici operazioni di manutenzione [Campbell, J.W.P., & Tutton, M., 2013 [30]]. Molte di queste scale erano a sviluppo elicoidale, di solito costruite parzialmente nello spessore delle pareti interne.

Lungo la costa occidentale a nord della Sicilia, il Tempio A del complesso di Selinunte offre chiari resti di scale a sviluppo elicoidale, come testimoniato dal ritrovamento di particolari conci in pietra opportunamente sagomati, nei quali è perfettamente visibile l'elemento di raccordo verticale, cfr. figura 1.14.

Altri esempi simili sono stati ritrovati in tutto il sud dell'Italia, come nel caso del magnifico Tempio di Hera a Paestum, dove è possibile osservare delle scale a spirale di notevole pregio in ottime condizioni. Molti storici dell'architettura sono concordi nell'affermare che alcune delle più significative scale del periodo medievale siano state influenzate proprio dalla tecnica greca.



Figura 1.14: Particolare dei gradini ritrovati all'interno del Tempio A di Selinunte

I romani non apportano significativi progressi nella progettazione e nella costruzione delle scale in muratura, limitandosi a portare avanti la ricca tradizione precedente. Un'opera degna di menzione, però, è la Colonna Traiana, raffigurante la vittoria di Traiano nelle guerre contro i Daci. In questa particolare opera si assiste, per la prima volta nell'arte romana, ad un'espressione autonoma in ogni suo aspetto [Beckmann, M., 2002 [18]]. Ulteriori esempi di imponenti opere risalenti al periodo romano sono riscontrabili all'interno dell'Anfiteatro di Pompei, contenente alcune rilevanti scale a doppia rampa impostate su una struttura ad arco semicircolare.

È difficile stabilire se il modello della Colonna Traiana abbia influenzato direttamente la forma dei minareti islamici, ma è certo che questi siano stati influenzati fortemente dalle torri delle chiese cristiane in Siria. Nell'architettura islamica lo scopo è quello di indicare la presenza dell'Islam e richiamare i fedeli alla preghiera attraverso punti di riferimento facilmente visibili da qualsiasi posizione. I primi minareti sopravvissuti risalgono al IX secolo e possiedono scale esterne, come nel caso del Minareto al-Malwiya della grande Moschea di Jami al-Mutawakkil a Samarra, cfr. figura 1.15. Questo si erge per oltre cinquanta metri di altezza, mentre i suoi gradini a spirale si snodano in senso antiorario attorno al suo imponente sviluppo verticale.

La scala in muratura approda al periodo medievale senza particolari cambiamenti o innovazioni, diffondendosi ben presto in tutta l'Europa settentrionale.

## L'evoluzione storica delle strutture in muratura

---

Forse una delle strutture che maggiormente influenza i criteri progettuali medievali è la scala all'interno del massiccio muro della Porta di Bab el-Nasr al Cairo, costruita dai muratori armeni di Urfa e chiaro modello dal quale si sviluppa il progetto della celebre Vite di Sain-Gilles in Francia [Fallacara, G., 2003 [47]].



Figura 1.15: Minareto al-Malwiya della Moschea di Jami al-Mutawakkil a Samarra

approda a Napoli, e vi costruisce la notevole scala elicoidale tuttora osservabile e percorribile all'interno del Maschio Angioino, cfr. figura 1.16.

La scala elicoidale tardo-medievale, relativamente stretta e incapace di catturare la luce esterna, a causa della sua conformazione stilistica, cambia completamente connotazione in questo periodo, diventando una struttura più ampia e luminosa, utilizzata come elemento di fascinazione portato all'estremo. L'esempio sicuramente più emblematico di tale trasformazione è costituito dalla scala a doppia elica del Castello di Chambord, realizzata agli inizi del XVI secolo e universalmente riconosciuta come l'apoteosi della tecnica costruttiva pre-rinascimentale.

Molte scale medievali si trovavano all'interno delle fortificazioni, nei castelli e negli edifici religiosi, dove erano generalmente subordinate a funzioni di difesa e di servizio. Queste presentavano indistintamente sia rampe a sviluppo rettilineo che rampe a sviluppo elicoidale.

Non tutte le scale erano, però, costituite da elementi in pietra conca, in molte di queste, infatti, è chiaramente riscontrabile un pesante utilizzo di calcestrutto rudimentale a matrice molto grossolana, una particolare tecnica esportata dai Normanni in Inghilterra dopo il I secolo.

Nel periodo pre-rinascimentale lo scultore spagnolo Sagrera progetta e costruisce la celebre Caracol de Mallorca, una scala elicoidale che influenzerà particolarmente il progetto delle scale a torre della Sagrada Família di Barcellona [Sanjurjo Alvarez, A., 2015, [96]]. Successivamente Sagrera



Figura 1.16: Scala a chiocciola presente all'interno del Maschio Angioino a Napoli

A questa concezione libera e ariosa delle scale in muratura fa da contraltare la tecnica costruttiva tedesca, molto audace nelle forme ma tradizionalmente ben più austera. Neumann, agli inizi del XVIII secolo, progetta e realizza la scala a doppia elica all'interno del Castello di Brusksal, la perfetta materializzazione dello stile di quella parte di mondo occidentale.

Successivamente è lo stile barocco a influenzare molte delle più emblematiche scalinate del XIX secolo. Innumerevoli esempi possono essere trovati negli edifici governativi, municipali e commerciali di tutto il mondo. Un esempio su tutti è il progetto di Garnier per la scala principale del Teatro dell'Opera di Parigi, costruita completamente in muratura di pietra conca.

Con lo sviluppo inarrestabile della tecnica dell'acciaio, la concezione di scala in muratura viene ben presto abbandonata in favore di costruzioni di più semplice realizzazione, nelle quali l'insorgenza di sollecitazioni di trazione poteva essere agevolmente contrastata predisponendo l'adeguato rinforzo strutturale.



## Capitolo 2

# Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

### 2.1 Aspetti teorici della meccanica di archi e volte in muratura

Sulla scorta dei documenti e delle memorie storiche raccolte da [Becchi, A., & Foce, F., 2002 [17]] è possibile ricondurre la prima riflessione scritta sulla meccanica dell'arco a Leonardo da Vinci. Egli, immaginandolo composto da due travi ad asse curvilineo vincolate ad un sostegno verticale, in equilibrio grazie ad azioni di mutuo contrasto in sommità, afferma che *"arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze; imperoché l'arco negli edifici è composto di due quarti di circolo, i quali quarti circoli ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e opponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in una unica fortezza"*.

La storia moderna dell'analisi statica delle costruzioni murarie, invece, ha inizio con i preziosi contributi delle due scuole più influenti in ambito scientifico alla metà del XVII secolo: quella francese e quella inglese. Fondamentali sono, infatti, i primi studi attribuibili a [Derand, F., 1643 [39]] e ad [Hooke, R., 1676 [60]] in relazione al comportamento statico di archi e volte in muratura. Celebre è l'intuizione di quest'ultimo, che all'interno di un anagramma in latino celato tra le righe di un suo articolo scrive che *"come pende un continuo flessibile, allo stesso modo sta in piedi un contiguo rigido invertito"*, cfr. figura 2.1.



## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

consolidano ulteriormente quella che successivamente verrà denominata Teoria non Attritiva degli archi e delle volte.

Ulteriori avanzamenti in tal senso sono attribuibili a [Couplet, P., 1729 [35]], che introduce, anche se in maniera del tutto implicita, le ipotesi fondamentali sul comportamento meccanico della muratura. In particolare Couplet osserva che il fenomeno dell'attrito tra i conci elementari non è in grado di scongiurare il mutuo scorrimento, ma soprattutto che la condizione di collasso generale avviene principalmente a causa del distacco tra questi, a seguito della formazione di un cinematismo di rotazione attorno ad alcune cerniere. Egli pone ulteriore attenzione sulla poca rilevanza che i meccanismi di resistenza a compressione della pietra possiedono nell'equilibrio globale di una generica costruzione in muratura.

Il primo vero trattato sulla progettazione delle cupole in muratura, invece, è attribuibibile all'opera di [Bouguer, P., 1734 [26]], che in condizioni di attrito nullo sviluppato tra i conci elementari della costruzione ne studia e ne analizza le possibili configurazioni stabili.

Ma il lavoro che più di tutti pare aver influenzato la trattatistica sulle strutture voltate in muratura è indubbiamente quello di [Frezier, A.F., 1737 [50]], che propone un metodo generale e rigoroso per l'analisi del comportamento meccanico delle volte composite. Scomponendo idealmente la struttura in una serie di archi elementari, egli è in grado di mettere agevolmente in relazione la spinta generata da una volta composta con quella di una volta semplice per la quale sia nota la soluzione di equilibrio.

La combinazione tra i due approcci ha consentito lo sviluppo di una serie di studi in campo matematico, ampiamente considerati durante le fasi progettuali di molte importanti e significative costruzioni dell'epoca. Le successive opere di [Bossut, C., 1776 [25]], [Salimbeni, L., 1787 [95]] e [Bérard, J., 1810 [20]] completano il quadro culturale a cavallo tra il XVIII e il XIX secolo.

TRAITE' DE MECANIQUE. 293  
 tent les temps que le corps A emploie à parcourir par tout de la même vitesse, & du même mouvement d'impulsion les lignes différemment inclinées AS : je dis que toutes les lignes AT représenteront les espaces que le corps parcourt dans chaquetems représenté par AS.

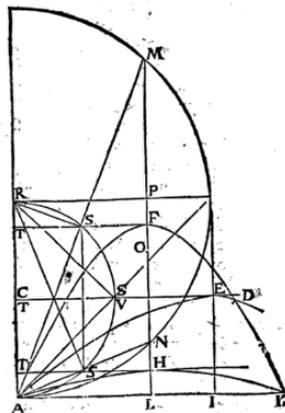


Figura 2.2: Estratto degli studi e delle ricerche sulla meccanica [De la Hire, P., 1729 [38]]

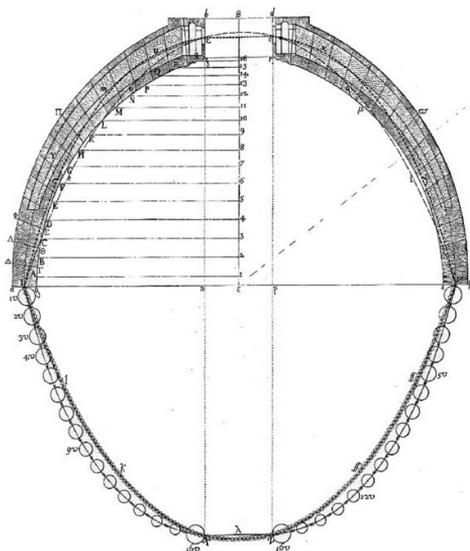


Figura 2.3: Schema utilizzato per la perizia sulla cupola della Basilica di San Pietro a Roma [Poleni, G., 1748 [85]]

tari dotati di una certa massa, calcolata sulla base delle indagini relative alla precedente perizia.

Prendendo come riferimento una catena, Poleni vi applica una serie di masse proporzionali a quelle dei vari elementi lapidei, dunque, invertendone la forma riesce a ricavare il poligono funicolare dei carichi per ogni spicchio di cupola, cfr. figura 2.3. Indipendentemente dal consiglio di aggiungervi cinque cerchiature metalliche alla base, la struttura risultava sicura.

Nel frattempo si affacciano nuove teorie scientifiche nel panorama culturale dell'epoca. [Coulomb, C.A., 1773 [34]] formula una rigorosa trattazione matematica sulla meccanica degli archi e delle volte in muratura, introducendo gli effetti di schiacciamento del materiale in corrispondenza delle cerniere per superati limiti di resistenza a compressione.

Le sue idee vengono successivamente riprese e dimostrate, in via del tutto sperimentale, da [Barlow, W.H., 1846 [16]] sulla base delle approfondite conoscenze raggiunte nell'ambito della statica grafica. Egli studia un metodo generale di ricerca dello spessore minimo di un arco in muratura in relazione al sistema di carichi su di esso agente.

Successivamente viene effettuata la prima verifica di stabilità sull'imponente cupola della Basilica di San Pietro a Roma, con lo scopo di fornire una spiegazione plausibile in merito all'origine del preoccupante stato fessurativo lungo le direzioni meridiane di questa. I tre illustri matematici [Le Seur, T., Jacquier, F., e Boscovich, R.G., 1742] studiano approfonditamente la situazione, attribuendo un tale quadro di lesioni al cedimento verso l'esterno del tamburo alla base della cupola.

La successiva perizia viene affidata a Poleni, e viene pubblicata nel suo famoso trattato [Poleni, G., 1748 [85]]. Egli immagina di scomporre la cupola in spicchi di arco, ognuno dei quali composto da una serie di conci elementari

In un altro interessante esperimento, Barlow analizza una struttura ad arco composta da una serie di conci elementari, simulando la presenza di malta fra questi tramite l'ausilio di tavole in legno estraibili, che potevano essere composte al fine di individuare una forma plausibile per il poligono funicolare dei carichi. Sebbene in maniera del tutto implicita, i concetti di configurazione di minima e di massima spinta orizzontale sono attribuibili alle sue scoperte, cfr. figura 2.4.

Alla fine del XVIII secolo [Gauthey, E.M., 1798 [54]] fornisce un importante contributo al progetto per la realizzazione della cupola della Cattedrale di Sainte-Genevieve a Parigi, applicando le teorie precedentemente formulate da Frezier. Qualche decennio dopo [Lamé, G., & Clapeyron, E., 1823] si occupano di verificare la stabilità della cupola emisferica della Cattedrale di San Isaac a San Pietroburgo, mediante l'impiego di un metodo di discretizzazione molto simile a quello utilizzato da Poleni per la cupola della Basilica di San Pietro a Roma.

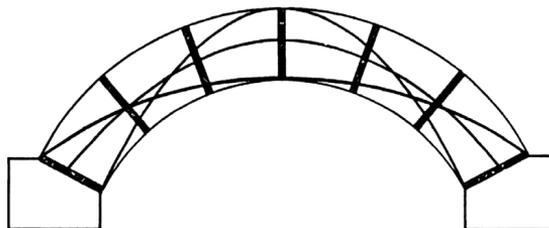


Figura 2.4: Curve di minima e di massima spinta orizzontale identificate su un arco [Barlow, W.H., 1846 [16]]

Anche [Navier, C.L., 1826 [80]] si occupa della statica delle volte in muratura, affrontando i problemi legati al dimensionamento delle cerchiature metalliche, principalmente su volte a crociera e a padiglione.

La completa ed esaustiva formalizzazione della teoria del poligono funicolare dei carichi, però, è attribuibile al mirabile lavoro svolto da [Young, T., 1817]. Sulla scorta di indagini approfondite, e di numerosi esperimenti svolti su strutture ad arco in muratura soggette a differenti condizioni di carico, egli dimostra come la posizione del poligono all'interno di questi non debba mai avvicinarsi troppo alle linee di intradosso e di estradosso, al fine di rimanere all'interno di un range di pura compressione. Inoltre Young definisce il concetto di fattore di sicurezza geometrico, seppure in maniera del tutto implicita.

Tuttavia, anche a fronte di così importanti innovazioni apportate nel campo della teoria strutturale degli archi, i suoi contributi scientifici vengono rivalutati soltanto di recente da [Huerta, S., 2008 [61]] e [Kurrer, K.E., 2008 [63]], cfr. figura 2.5.

Grande influenza all'interno della comunità scientifica è esercitata, invece, da [Mery, E., 1840 [75]]. Nei suoi innumerevoli lavori sulla statica delle strutture murarie, egli stabilisce una corrispondenza diretta tra la forma assunta

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

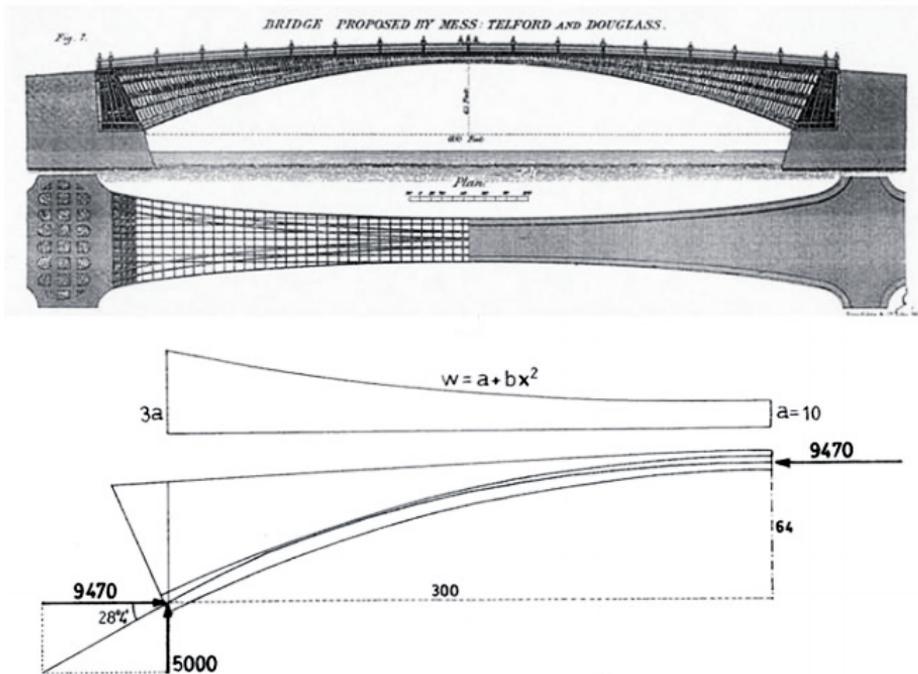


Figura 2.5: Estratto dell'analisi proposta da Young sul Telford Bridge di Birmingham [Huerta, S., 2008 [61]]

dal poligono funicolare dei carichi, in relazione al sistema di forze agente, e la formazione di meccanismi di collasso. Rileggendo i risultati sperimentali delle prove fino a quel momento condotte su archi composti da conci elementari, alla luce della nuova teoria sviluppata, Mery riesce a calcolare precisamente lo spessore limite corrispondente, e a definire in modo significativo i concetti di limite inferiore e di limite superiore della spinta orizzontale.

Il problema di ricerca della cosiddetta vera forma di un poligono funicolare dei carichi viene affrontato da [Moseley, H., 1833 [79]], che la fa corrispondere alla configurazione assunta dalla curva di minima spinta orizzontale per un arco in muratura, cfr. figura 2.6.

[Culmann, K., 1866 [36]], dal canto suo, sostiene che la vera forma di un poligono funicolare dei carichi sia, invece, quella in grado di minimizzare la distanza della linea media dell'arco tra le due imposte. Ovviamente i metodi

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

grafici sviluppati fino a quel tempo non permettevano lo studio di tutti gli stati di equilibrio per tutte le possibili condizioni di carico.

Proprio per cercare di colmare tali lacune, [Rankine, W.J., 1857 [92]] sviluppa un metodo generale per il tracciamento del poligono funicolare dei carichi, attraverso la separazione concettuale tra questo e il poligono delle forze.

Sul fronte dell'analisi statica delle volte in muratura, che andava di pari passo con quella degli archi, ulteriori importanti contributi di carattere puramente matematico vengono forniti da [Persy, N., 1834 [84]], [Kobell, J., 1855] e [Scheffler, H., 1857 [98]].

Di grande rilevanza è anche il metodo sviluppato da [Michon, P.F., 1857 [76]] per calcolare rapidamente le spinte interne ad una copertura muraria, tenendo in conto sia l'equilibrio globale della struttura che le sue condizioni di fessurazione.

[Wittmann, W., 1879 [108]] pubblica la sua prima analisi grafica sulle volte in muratura, estendendo formalmente il concetto di poligono funicolare dei carichi allo studio delle cupole emisferiche, cfr. figura 2.7. Contemporaneamente [Eddy, H.T., 1878 [44]] sviluppa un metodo grafico per la determinazione delle forze lungo le direzioni parallele nelle quali le cupole potevano idealmente essere suddivise.

Tuttavia è [Mohrmann, K., 1890 [78]] ad esporre lo studio più rigoroso e dettagliato relativo alle volte in muratura, con particolare riferimento al progetto di volte a crociera nelle cattedrali gotiche.

A partire dalla seconda metà del XIX secolo viene formulata la Teoria dell'Elasticità, che stravolge completamente il quadro culturale dell'epoca, fornendo connotazioni completamente nuove alla teoria statica degli archi e delle volte in muratura.

[Poncelet, J.V., 1852 [86]] considera l'ipotesi di studiare il problema dell'equilibrio di un arco composto da conci elementari in pietra, assimilandolo ad

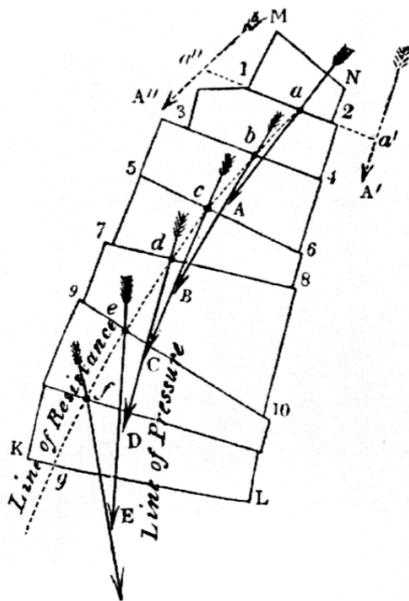


Figura 2.6: Schema illustrativo del concetto di linea delle pressioni [Moseley, H., 1833 [79]]

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

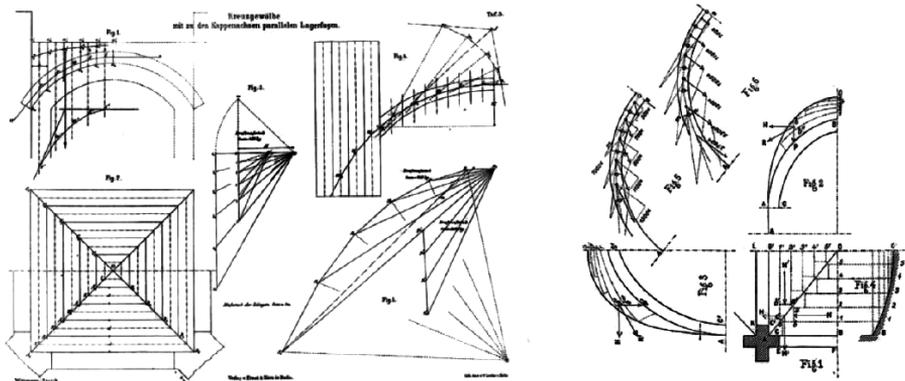


Figura 2.7: Tavole illustrative dell'analisi grafica di una volta a crociera [Wittmann, W., 1879 [108]]

una trave elastica caratterizzata da una linea d'asse curva.

Tale principio viene esteso da [Navier, C.L., 1826 [80]], e formalizzato successivamente da [Winkler, E., 1879 [107]] attraverso una completa trattazione sull'applicabilità della teoria elastica alle strutture murarie. Egli pone in correlazione i molteplici aspetti che caratterizzano la trave elastica con quelli più squisitamente legati agli archi e alle volte.

Nello stesso anno, in maniera del tutto indipendente, [Castigliano, A., 1879 [31]] applica la Teoria dell'Elasticità all'analisi del Ponte Mosca di Torino, considerando l'aggregato murario come un solido non reagente alle sollecitazioni di trazione, cfr. figura 2.8.

L'analisi elastica comincia, dunque, a svilupparsi fortemente proprio in concomitanza delle prime campagne di sperimentazione sulla resistenza dei materiali da costruzione. Un tale approccio ricercava la soluzione di equilibrio per una struttura soggetta ad un assegnato sistema di carichi, verificando che gli sforzi all'interno dei materiali fossero in accordo con i limiti ammissibili di esercizio.

Ma se per una struttura isostatica la risoluzione delle equazioni cardinali della statica riusciva a fornire una soluzione equilibrata unica, questo non si verificava per le strutture iperstatiche, che necessitavano dell'esplicitazione di ulteriori parametri particolarmente ardui da definire, come le proprietà del materiale e le condizioni di congruenza imposte dai vincoli.

Ben presto i limiti di una tale teoria diventano sempre più palesi, soprattutto in relazione all'impossibilità di definire un modello meccanico capace di carat-

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

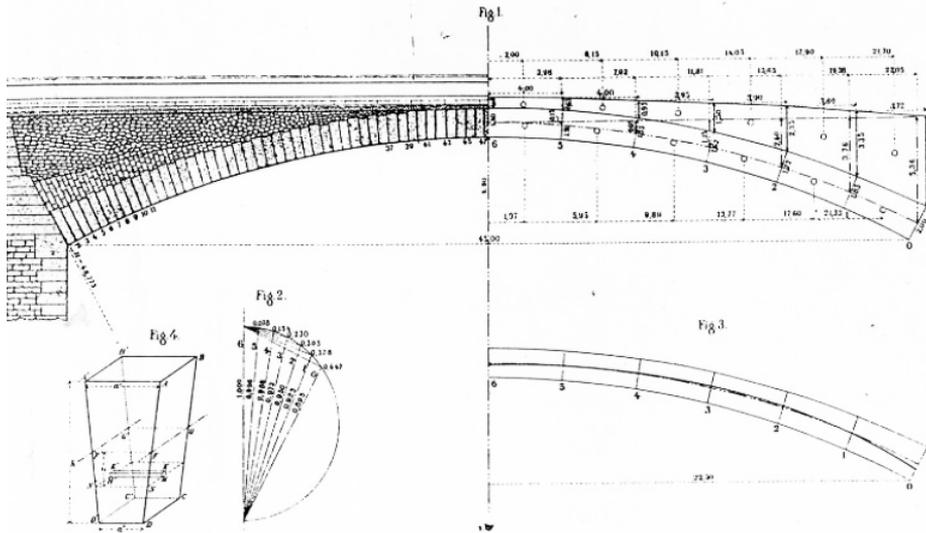


Figura 2.8: Tavole del progetto strutturale relativo al Ponte Mosca di Torino [Castigliano, A., 1879 [31]]

terizzare univocamente tutte le tipologie murarie. Dunque nella prima metà del XX secolo inizia ad essere messa in discussione l'efficacia di un approccio di verifica strutturale basato sulla ricerca dell'effettivo stato di sollecitazione.

Sulla base di tali considerazioni [Drucker, D.C., 1952 [42]], [Drucker, D.C., & Prager, W., 1952 [43]], [Kooharian, A., 1953 [62]] e [Prager, W., 1957 [87], 1959 [88]] forniscono importanti contributi nell'ambito della nascita Teoria della Plasticità, per la quale, al raggiungimento della massima capacità flettente in una sezione della struttura, si verifica una rotazione relativa illimitata tra le parti del solido a cavallo della stessa, schematizzabile mediante una cerniera plastica.

Il collasso generale avviene per perdita di equilibrio, quando il carico agente supera il valore di collasso plastico e determina la formazione di un numero di cerniere tale da innescare la labilità dello schema statico.

Proprio sulla scorta di queste nuove considerazioni, esprimendo tutte le perplessità in relazione alla possibilità di modellare un arco in muratura al pari di una trave elastica, [Heyman, J., 1966 [57], 1982 [58]] rielabora i metodi tradizionali dell'analisi strutturale, formulando un più moderno approccio per la

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

comprensione del comportamento meccanico delle costruzioni in muratura.

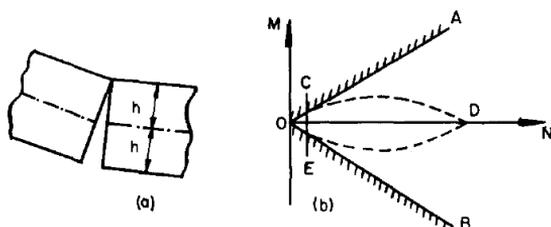


Figura 2.9: Condizioni limite per i conci di un arco in muratura [Heyman, J., 1966 [57]]

carico in equilibrio con esso è inferiore o al più uguale al carico di collasso plastico della struttura; quindi la struttura è sicura”, e ancora che “se è possibile trovare una curva delle pressioni per l’arco completo che sia in equilibrio con i carichi applicati e che rimane ovunque all’interno dell’arco, allora questa è una prova che l’arco è stabile e che il collasso non potrà mai avvenire in corrispondenza del carico dato”.

Ecco che il problema della stabilità di una tale struttura viene ricondotto alla determinazione di un poligono funicolare dei carichi, identificativo di un possibile stato di equilibrio staticamente ammissibile per esso.

Impostare la verifica di un arco o di una volta in muratura secondo i principi della plasticità permetteva, dunque, di prescindere dallo stato effettivo di lavoro della struttura, che risultava comunque impossibile da definire con esattezza. Qualora questo fosse risultato stabile sotto il carico assegnatogli, ognuno dei possibili poligoni funicolari dei carichi staticamente ammissibili avrebbe costituito una differente condizione di equilibrio.

In relazione ad alcune evidenze sperimentali, Heyman intuisce la possibilità di ricondurre la verifica di un arco o di una volta in muratura alla sola condizione di stabilità, formulando esplicitamente le tre ipotesi fondamentali da cui ricavare una modellazione semplificata, cfr. figura 2.9.

Tali ipotesi di non resistenza a trazione, di resistenza infinita a compressione e di scorrimento relativo impedito tra i conci elementari, conducono a svincolare completamente il problema dell’equilibrio di una struttura in muratura dalle condizioni di congruenza del materiale.

Sulla base del Teorema Statico dell’Analisi Limite, egli afferma che “se è possibile trovare uno stato di equilibrio staticamente ammissibile, ovvero uno per il quale l’insieme delle azioni interne sia in equilibrio con i carichi esterni e inoltre per il quale ogni porzione interna della struttura soddisfi il criterio di resistenza stabilito per il materiale, il

## 2.2 Teoria e tecniche costruttive delle scale in muratura

I primi trattati di architettura delle scale in muratura risalgono al XV secolo, durante il quale inizia a diffondersi l'idea di pubblicare i vari progetti relativi alle opere caratterizzate dalle geometrie più ardite [Barbieri, A. et al., 2003 [15]]. All'interno di tali documenti era possibile ritrovare molti degli aspetti più squisitamente tecnici relativi alle varie componenti strutturali di un edificio, mentre nelle appendici veniva contemplata una sezione dedicata alle scale.

Di queste particolari costruzioni venivano fornite indicazioni in termini di sicurezza strutturale, posizionamento in relazione agli ambienti e modalità di messa in opera.

Il primo documento ufficiale a manifestare un forte interesse nei confronti delle scale in muratura risulta essere il Trattato di Scamozzi, risalente al periodo rinascimentale e formalizzato sulla base di quello che veniva considerato, all'epoca, il punto di riferimento per architetti e strutturisti di tutta Europa: il Trattato di Vitruvio [Gambardella, C., 1993 [51]].

Il crescente interesse manifestato nei confronti di queste peculiari strutture conduce anche [Alberti, L.B., 1485 [10]] a porre l'accento sull'importanza della scala all'interno dell'economia globale di un edificio, riconoscendone la manifesta complessità strutturale assieme a tutte le difficoltà in fase di realizzazione.

Nel successivo trattato di [Martini, G., 1490] è illustrata magistralmente una scala a sviluppo elicoidale situata all'interno della Torre di Cagli, ed utilizzata come unico punto di accesso alla vetta, simbolo di una chiara strategia militare difensiva, cfr. figura 2.10. La scala diveniva, dunque, uno strumento di guerra, ma soprattutto di salvezza.

Se nello studio di [Barozzi, J., & Cataneo, P., 1560] il cortile rappresenta il cuore dell'edificio, al quale le scale contribuiscono attraverso una mera funzione di servizio, il trattato di [Cornaro, A., 1556] dà enfasi al ruolo di queste parti-

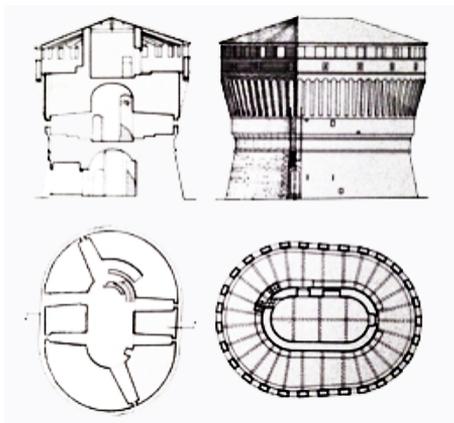


Figura 2.10: Illustrazioni relative al progetto della Torre di Cagli [Martini, G., 1490]

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

colari costruzioni, descrivendole come decisive nell'organizzazione globale degli spazi, ricalcando quanto già asserito da Alberti.

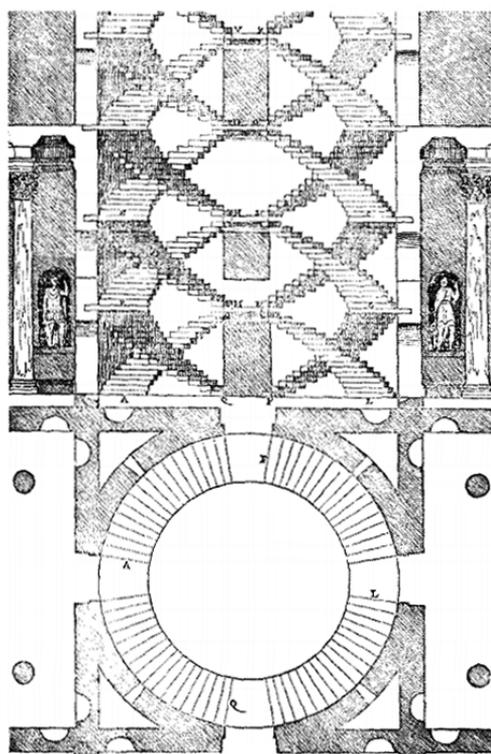


Figura 2.11: Illustrazione della scala a doppia elica nel Castello di Chambord [Martini, G., 1490]

va come *"molte persone vedano la scala e non il resto dell'edificio"*. Sulla stessa scia [De l'Orme, P., 1567] considera la scala in muratura come il *"cuore pulsante dell'edificio"*.

L'esempio probabilmente più illustre, capace di influenzare con la sua magnificenza il lavoro di molti artisti, è rappresentato dalla scala a doppia elica del Castello di Chambord, costruita da Domenico da Cortone per volontà di Francesco I, probabilmente seguendo il progetto originario di Leonardo da Vinci. Lo stesso Vignola potrebbe essere stato fortemente influenzato, nelle sue opere, proprio da questa particolare struttura, mentre [Palladio, A., 1570] la illustra

[Vasari, G., 1565] fornisce importanti spunti di carattere didattico e tecnico, affermando chiaramente come le scale in muratura dovessero necessariamente inquadarsi all'interno dello spazio dell'edificio, configurando soluzioni possibilmente quanto più comode, sicure e ampie, evitando repentini cambi di pendenza. Inoltre egli pone, per la prima volta, l'attenzione sull'aspetto puramente estetico, confermandosi perfettamente in linea con i canoni rinascimentali.

La scala comincia ad assumere un ruolo quasi preminente nel progetto architettonico e strutturale, al pari o forse più degli ambienti principali. Questa diventa rapidamente un elemento dotato di forte rappresentatività, una sorta di misuratore della bellezza globale di un palazzo, di una chiesa o di un castello, capace di attirare l'attenzione. Celebre è la sua affermazione in merito a quest'ultimo aspetto, nel quale egli osserva

addirittura all'interno del suo trattato di architettura, cfr. figura 2.11.

In un successivo lavoro, [Serlio, S., 1584 [100]] dichiara che le scale elicoidali sono "strutture ardue da costruire, e chi non è capace di progettare quelle tradizionali non dovrebbe nemmeno provare a progettare quelle più complesse". Ecco che la scala consolida il suo ruolo di elemento complesso e peculiare, comprensibile solo al progettista più esperto.

Serlio la inserisce in alcuni studi prospettici, e cerca di produrre una sorta di manuale universale per la sua corretta progettazione, citando, come unica opera moderna degna di ammirazione, la scala elicoidale del Bramante.

Ulteriori contributi sulla statica e sugli aspetti architettonici delle scale in muratura sono attribuibili a [Scamozzi, V., 1615], che ne definisce la giusta posizione all'interno degli edifici, nonché le diverse tipologie strutturali, distinguendo esplicitamente le scale di servizio da quelle principali, naturalmente molto più ampie e maestose. Inoltre egli fornisce indicazioni preziose sui materiali da costruzione preferibili, disapprovando nettamente l'utilizzo del legno per via della sua elevata infiammabilità. Proprio la mancanza di indicazioni specifiche all'interno della manualistica di fine XVII secolo induce Scamozzi a realizzare il suo celebre trattato, una sorta di manuale universale delle scale in muratura.

È possibile trovare maggiori informazioni sulle tecnologie costruttive nei trattati del XIX secolo, quando [Breyman, G.A., 1853 [27]] dedica completamente un libro alle scale in muratura, nel quale opera, per la prima volta, la distinzione tra quelle a collo, poggianti su un supporto continuo, e quelle a volo, supportate, invece, solamente alle estremità.

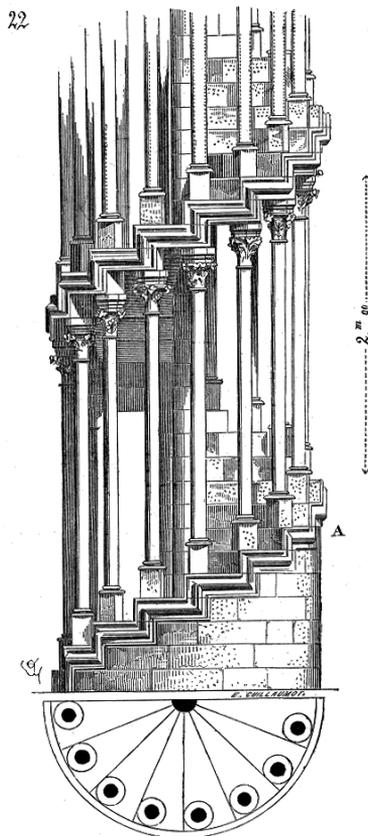


Figura 2.12: Illustrazione di una scala aperta a sviluppo elicoidale [Viollet-le-Duc, E.E., 1886 [106]]

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

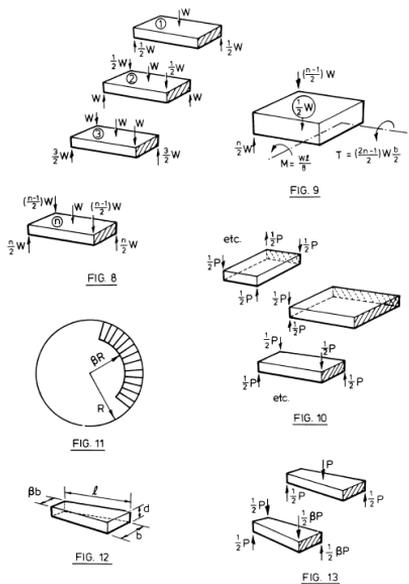


Figura 2.13: Modello di equilibrio per scale elicoidali immaginato come sovrapposizione di due sistemi di forze [Heyman, J., 1995 [59]]

re solo forze verticali tramite i loro spigoli. Egli intende una tale soluzione come la sovrapposizione di due distribuzioni equilibrate di forze verticali, che schematizzano il peso proprio del gradino e la forza di contatto trasmessa dall'elemento precedente, cfr. figura 2.13.

La soluzione fornita da [Maunder, E.A.W., 2005 [73]], per scale a sviluppo rettilineo, è in grado di ridurre notevolmente l'effetto di crescita illimitata delle azioni di torsione, equilibrando il poligono funicolare dei carichi discontinuo con i momenti torcenti trasmessi dalle pareti perimetrali ai singoli gradini. Di conseguenza le azioni longitudinali risultano puramente di compressione, mentre la coppia trasversale genera sollecitazioni di trazione di entità limitata all'interno di ciascun gradino.

Una proposta alternativa è sviluppata da [Baratta, A., & Corbi, I., 2012 [11], 2013 [12]] rispettivamente per l'analisi di scale alla romana e per quelle elicoidali, che vengono modellate come un'elica vincolata internamente ad un cilindro perimetrale indeformabile. La presenza di tensioni di trazione generate

Ma il lavoro più specialistico e completo inerente all'architettura muraria viene attribuito a [Viollet-le-Duc, E.E., 1886 [106]], all'interno del quale è possibile ritrovare mirabili illustrazioni di molte delle tipologie di scale in muratura esistenti, soprattutto nell'area geografica dell'Europa settentrionale, cfr. figura 2.12.

[Donghi, D., 1923 [41]] contribuisce all'ampio panorama della letteratura internazionale attraverso la redazione di due trattati esplicitamente volti ad illustrare le tecniche costruttive per scale in mattoni di laterizio, ponendole in netto contrasto con quelle realizzate in blocchi di pietra.

In tempi più moderni, una prima vera soluzione al problema dell'equilibrio delle scale in muratura viene fornita da [Heyman, J., 1995 [59]], che propone un razionale modello basato sull'equilibrio di una serie di elementi sovrapposti, immaginati come blocchi rigidi in grado di trasmettere

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

dall'insorgenza di una coppia longitudinale è difficile da motivare poiché viola palesemente l'ipotesi di materiale non reagente a trazione.

Questa considerazione ha spinto autori come [Little, P. et al., [65]], [O'Dwyer, D., & Bashorun, O., 2010 [83]] e [Price, S., & Rogers, H., 2005 [89]] a sviluppare ulteriori differenti soluzioni valide per scale a sbalzo, nelle quali l'azione di serraggio trasversale sia contestuale all'insorgenza di forze di contatto compressive tra i singoli gradini.

Considerazioni simili possono essere fatte per la soluzione proposta da [Angelillo, M., 2016 [6]], e sviluppata allo scopo di analizzare scale elicoidali composte da gradini monolitici interagenti esclusivamente per mezzo di un cordolo centrale. Riconsiderando la soluzione di [Heyman, J., 1995 [59]], egli formula un nuovo approccio per una struttura continua, combinando la soluzione originaria con una ad anello in grado di ridurre notevolmente la crescita delle azioni torcenti alla base della scala.

Sulla base del metodo delle membrane non reagenti a trazione, il lavoro proposto da [Gesualdo, A. et al., 2017 [55]] ricerca soluzioni di equilibrio per scale a sviluppo elicoidale; molto interessante è l'applicazione alla scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli.

Alcune proposte degne di menzione, volte alla semplificazione del metodo delle membrane non reagenti a trazione, sono attribuibili a [Commo, M., 2016 [33]] e a [García Ares, J., 2007 [52]], rispettivamente per l'analisi di scale alla romana e di scale elicoidali.

In entrambi i lavori, sebbene le applicazioni siano differenti dal punto di vista formale, la membrana viene considerata come una rete discreta di linee di spinta interagenti. Sempre [García Ares, J., 2011 [53]] propone un metodo innovativo per la risoluzione del problema di equilibrio di scale elicoidali alla Guastavino, sezionando idealmente la struttura tramite piani tangenti all'elica interna non supportata della membrana, assumendo che la parte superiore della curva sopporti il peso della struttura, mentre la parte inferiore abbia il solo scopo di trasferire le forze di spinta alla parete di sostegno.

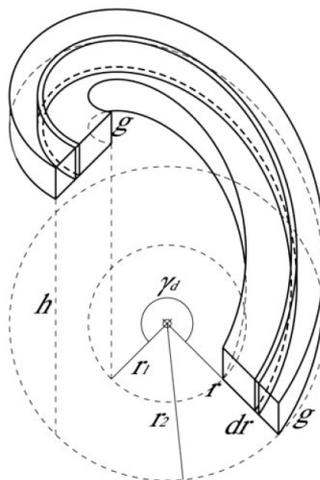


Figura 2.14: Parametri geometrici della rampa di una scala a sviluppo elicoidale [García Ares, J., 2007 [52]]

## 2.3 Contributi recenti all'analisi di stabilità delle strutture in muratura

In parallelo con gli approcci basati sull'osservazione diretta delle strutture, iniziano a concretizzarsi delle serie campagne sperimentali sulle costruzioni in muratura, con lo scopo di comprenderne la meccanica del collasso al variare delle condizioni di carico e della geometria. Uno dei primi lavori sperimentali contemporanei, relativo alla determinazione degli stati fessurativi nelle volte a crociera della Cattedrale di Colonia, è attribuibile a [Mark, R. et al., 1973 [70]], cfr. figura 2.15.

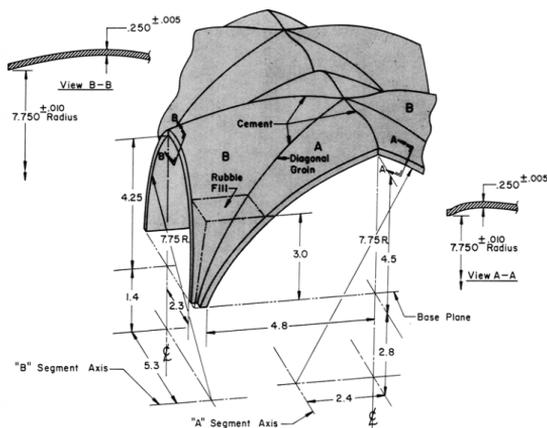


Figura 2.15: Modello geometrico delle volte a crociera della Cattedrale di Colonia [Mark, R. et al., 1973 [70]]

di volta a crociera soggetto ad un cedimento imposto dei supporti.

Un lavoro analogo è attribuibile a [Rossi, M. et al., 2017 [93]], che studia i meccanismi di collasso relativi ad alcuni modelli in scala di volta a padiglione soggetta al cedimento dei supporti, validando successivamente i risultati ottenuti attraverso metodi classici di statica grafica. Gli studi e le ricerche di [Ochsendorf, J., 2002 [81]] sono caratterizzati da una maggiore generalità delle casistiche analizzate, mentre assieme a [Quinonez, A. et al., 2010 [91]] egli studia un particolare modello in scala di cupola emisferica sottoposta ad un cedimento radiale controllato delle imposte.

Una completa campagna sperimentale su modelli di volte di diversa geo-

Successivamente [Ceradini, V., 1996 [32]] studia l'effetto dei cedimenti imposti su alcuni modelli di volta a crociera in muratura, mentre [Faccio, P., & Foraboschi, P., 2000 [46]] effettuano un'analisi al collasso su volte a crociera nervate in scala, soggette all'azione di carichi concentrati eccentrici.

Il ricorso sempre più frequente alle prove sperimentali per la validazione dei modelli numerici sviluppati porta [Van Mele, T. et al., 2012 [104]] ad analizzare i meccanismi di collasso per un modello

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

metria e differenti condizioni di carico è stata recentemente condotta da [Shapiro, E.E., 2012 [102]], mentre soluzioni esplicite per archi e volte dall'assetto ribassato sono riscontrabili in [Aita, D. et al., 2017 [1], [2]].

In [Milani, E. et al., 2008 [77]] viene proposto un approccio di analisi ad elementi finiti basato sul Teorema Cinematico dell'Analisi Limite. Attraverso una discretizzazione della volta tramite elementi rigidi curvi triangolari a sei nodi, per i quali la dissipazione plastica si concentra lungo gli spigoli, si ottiene un'agevole stima dei carichi che conducono la struttura al collasso. Fissando, inoltre, l'ammissibilità dello stato di sforzo all'interfaccia tra i vari conci elementari, si ricava il dominio di resistenza della massa muraria tramite un processo di omogenizzazione a partire da un volume rappresentativo dell'intera struttura, cfr. figura 2.16.

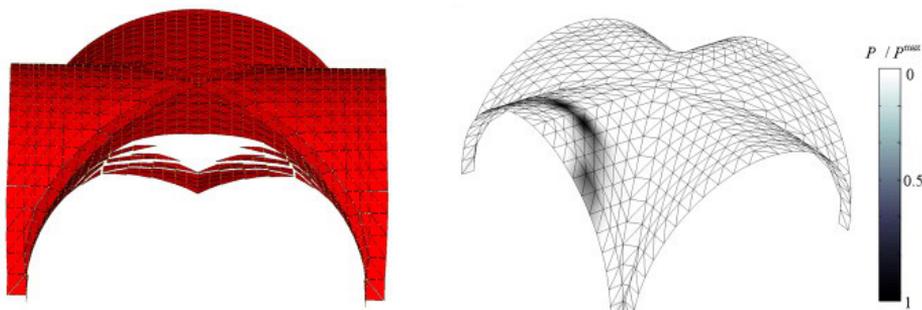


Figura 2.16: Percorso della potenza normalizzata dissipata per una volta a crociera [Milani, E. et al., 2008 [77]]

Il notevole onere computazionale dei metodi ad elementi finiti, e l'elevata sensibilità che la soluzione manifesta al variare dei parametri che caratterizzano i singoli elementi, hanno incrementato considerevolmente la richiesta di metodi semplificati basati sull'Analisi Limite, specialmente nel caso delle costruzioni storiche.

Il primo contributo in tal senso è attribuibile a [O'Dwyer, D., 1999 [82]], che implementa una serie di metodi di ottimizzazione lineare con lo scopo di estendere il principio del poligono funicolare dei carichi allo spazio tridimensionale, configurando un problema di ricerca di un reticolo interno alla muratura, idealmente costituito da aste compresse in equilibrio con i carichi assegnati.

Sebbene il metodo sviluppato consenta di includere le singolarità nelle varie condizioni di carico, questo fornisce soluzioni fortemente dipendenti dalla scelta arbitraria della forma del reticolo. Proprio a causa di questo motivo, il campo

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

di applicazione di una tale formulazione generale risulta limitato a strutture dotate di un elevato livello di simmetria geometrica, cfr. figura 2.17.

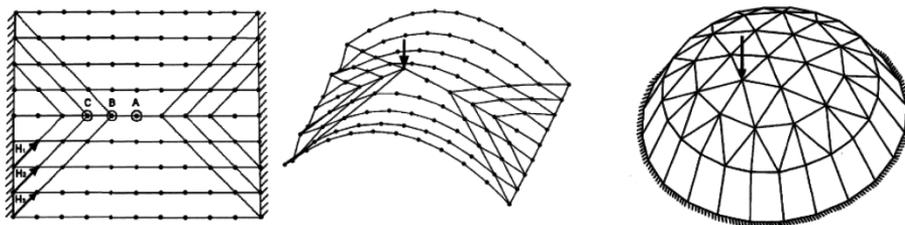


Figura 2.17: Topologia della rete di spinta e soluzioni di equilibrio per una volta a botte e per una cupola sottoposte a carichi concentrati [O'Dwyer, D., 1999 [82]]

Nella stessa direzione è orientato il metodo proposto da [Andreu, A., et al., 2007 [4]], fortemente ispirato ai modelli progettuali di Gaudí e di Heisler. Anche questo si basa sull'impiego di un algoritmo di ottimizzazione lineare capace di ricercare le possibili configurazioni spaziali delle spinte interne alle volte in muratura, relativamente a condizioni di carico verticale.

Riprendendo la formulazione originaria di O'Dwyer, [Block, P., & Ochsendorf, J., 2006 [23]], [Block, P., 2009 [21]], [Block, P., & Lachauer, L., 2014 [22]] sviluppa un procedimento computazionale capace di ricercare i reticoli delle spinte attraverso un'evoluzione delle tecniche di statica grafica [Maxwell, J.C., 1870 [74]] estese allo spazio tridimensionale. Sulla base di una forte componente grafico-visuale, la Thrust Network Analysis si caratterizza per l'elevata velocità computazionale che consente un'agevole esplorazione delle diverse soluzioni fornite in funzione delle varie distribuzioni di forze interne, cfr. figura 2.18.

Tale approccio, sebbene in grado di superare alcuni dei limiti palesati all'interno della formulazione originaria di O'Dwyer, non fornisce una risposta adeguata al problema della scelta arbitraria del reticolo di partenza, dalla quale dipende fortemente la soluzione ottenuta. Inoltre ulteriori limitazioni riguardano le condizioni di carico, anche qui rappresentative di azioni verticali.

[Angelillo, M., & Fortunato, A., 2002 [8]] sviluppano un procedimento per il quale il problema di equilibrio tridimensionale della volta viene analizzato tramite la ricerca di membrane non reagenti a trazione. Queste vengono discretizzate mediante reticoli di sforzi singolari di compressione, interamente contenuti nel dominio della muratura, attraverso l'introduzione della funzione di tensione di Airy.

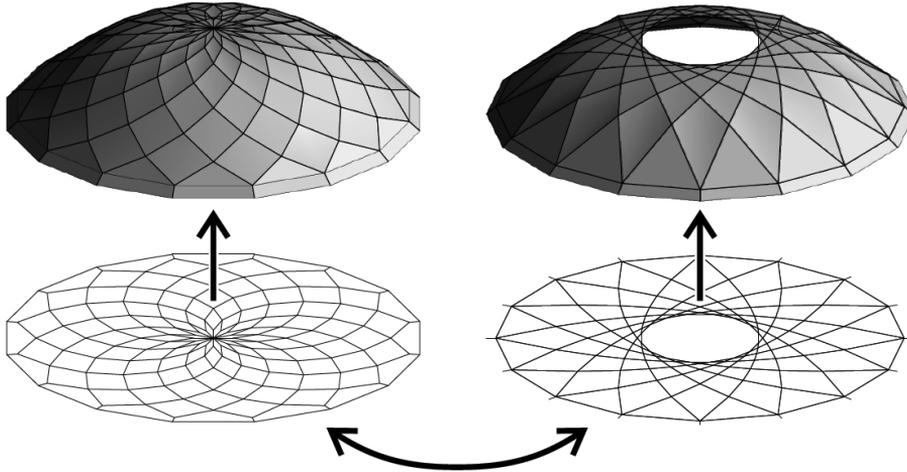


Figura 2.18: Corrispondenze tra la griglia primaria e quella duale per una copertura tridimensionale [Block, P., 2009 [21]]

Tale metodo viene successivamente esteso da [Fraternali, F., 2010 [49]]. Naturalmente esistono alcune limitazioni nella caratterizzazione della soluzione ottenuta, che risulta in grado di fornire indicazioni sulla stabilità della struttura analizzata solamente rispetto ad una determinata condizione di carico.

[Baratta, A., & Corbi, O., 2010 [13], 2011 [14]] propongono un metodo basato esclusivamente su condizioni di equilibrio delle volte a botte in muratura, in grado di ricercare la forma di membrane non reagenti a trazione completamente contenute nel dominio della massa muraria. L'equilibrio di tali membrane viene risolto ipotizzando che la funzione di tensione di Airy costituisca una generica funzione della superficie della membrana, conducendo ad un'unica equazione differenziale alle derivate parziali. Tale procedimento risulta limitato soltanto all'applicazione di carichi verticali, e resta vincolato ad una ristretta classe di sforzi ammissibili.

Un contributo più generale e rigoroso nella ricerca della forma di membrane non reagenti a trazione per volte in muratura viene fornito da [Angelillo, M., et al., 2013 [7]] e [Angelillo, M., 2014 [5]]. Egli modella la volta in questione al pari di un solido continuo non reagente a trazione, dunque, a partire dalla Teoria degli Sforzi Singolari sviluppata da [Lucchesi, M., et al., 2005 [66], 2006 [67]], considera stati di sforzo singolari concentrati su superfici contenute all'interno dello spessore della muratura.

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

La geometria di tali membrane viene espressa attraverso la trattazione di Monge, mentre il loro equilibrio è generalmente formulato seguendo l'approccio di [Pucher, A., 2017 [90]]. Proprio l'introduzione della funzione di tensione di Airy riduce un problema differenziale alle derivate parziali in due funzioni scalari, di cui una determina la geometria della membrana e l'altra la funzione di tensione. Definendo le opportune condizioni al contorno, una tale analisi è capace di ricercare la soluzione in forma chiusa fissando una delle due funzioni.

Questo metodo è stato applicato, con successo, alle volte in muratura da [Lepore, N., 2018 [64]], e rappresenta una sfida ancora aperta per quel che riguarda l'estensione a strutture dotate di geometrie più complesse, cfr. figura 2.19.

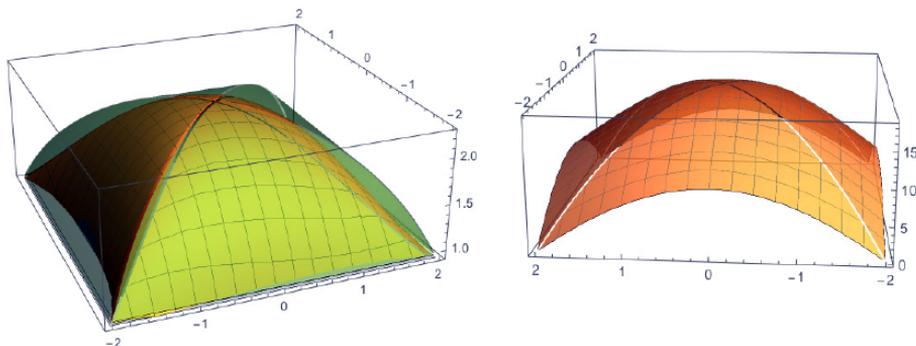


Figura 2.19: Soluzione corrispondente al massimo moltiplicatore dei carichi orizzontali, con relativa funzione degli sforzi per una volta a padiglione [Lepore, N., 2018 [64]]

Con l'obiettivo di fornire una maggiore versatilità all'analisi tramite reti di spinta, il presente lavoro di tesi si inserisce nel quadro della recente riformulazione a cura di [Marmo, F., & Rosati, L., 2017 [72]]. Tale lavoro si prefigge, ulteriormente, la validazione del metodo attraverso la sua applicazione ad una classe di costruzioni in muratura caratterizzata da una notevole complessità strutturale [Marmo, F. et al., 2018 [71]]. In un tale contesto migliorativo viene notevolmente ridotta la componente di statica grafica in favore di più elevate prestazioni computazionali, e mediante la definizione di procedure ottimizzate il metodo viene esteso all'analisi di strutture composte da bordi non vincolati, nonché soggette ad azioni orizzontali di tipo statico.

## 2.4 Analisi tramite membrane non reagenti a trazione

Nel metodo proposto da [Angelillo, M., et al., 2013 [7]], [Angelillo. M., 2014 [5]], e applicato da [Gesualdo, A. et al., 2017 [55]] alla scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli, si considera una volta in muratura soggetta ad un carico applicato sostenuto da una struttura a membrana  $S$  di spessore  $s$ . Tale superficie, continua ma non necessariamente differenziabile con continuità, si assume rappresentabile attraverso una geometria suscettibile di deformazione, purché questa rimanga contenuta all'interno dello spessore della muratura, cfr. figura 2.20. La generica posizione  $\mathbf{x}$  sulla superficie media  $S$  ha coordinate cartesiane date da:

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, f(x_1, x_2)\}, \quad \{x_1, x_2\} \in \Omega \quad (2.1)$$

dove  $\Omega$  è un dominio connesso bidimensionale avente frontiera  $\partial\Omega$  composta da un numero finito di curve chiuse di normale esterna  $\mathbf{n}$  e rappresentante la proiezione in pianta di  $S$ .

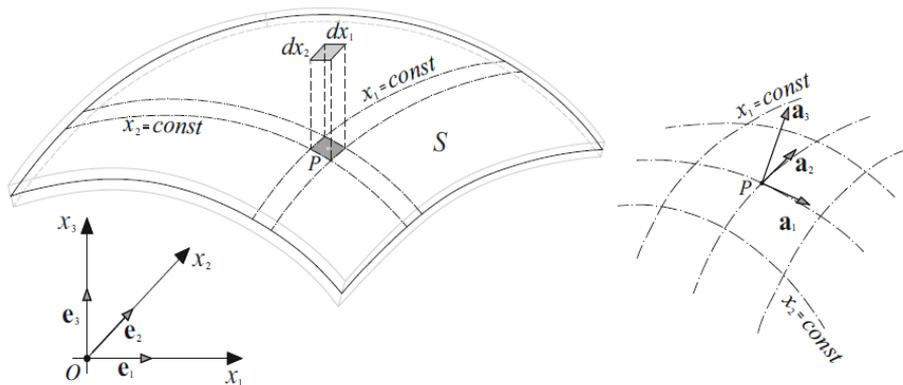


Figura 2.20: Trasformazione del sistema di coordinate da cartesiano a curvilineo

Le coordinate  $\{x_1, x_2\}$  sono coordinate cartesiane di  $S$  nella proiezione in pianta, mentre  $x_3 = f(x_1, x_2)$  è l'altezza della membrana, con  $f \in C^0(\Omega)$ . I vettori unitari associati al sistema di riferimento cartesiano sono indicati con  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

La membrana è sottoposta all'azione dei carichi esterni  $\mathbf{q}$  considerati per unità di area, bilanciati dalle tensioni di membrana  $\mathbf{T}$ , le cui componenti sono illustrate in figura 2.21. I vettori di base covarianti, tangenti a  $S$ , associati alle coordinate curvilinee  $\{x_1, x_2\}$ , sono:

$$\mathbf{a}_1 = \{1, 0, f_{,1}\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{0, 1, f_{,2}\}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{J}\{-f_{,1}, -f_{,2}, 1\} \quad (2.2)$$

dove  $f_{,i}$  rappresenta la derivata parziale della funzione  $f$  rispetto a  $x_i$ ,  $\mathbf{a}_3$  è la normale unitaria ad  $S$ , e il determinante Jacobiano  $J = \sqrt{1 + f_{,1}^2 + f_{,2}^2}$  descrive il rapporto tra l'area della superficie infinitesima tangente ad  $S$  e la sua proiezione in pianta. La base  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  non è né unitaria né ortogonale, ed i vettori di base controvarianti sono:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{J^2}\{1 + f_{,2}^2 - f_{,1}f_{,2}, f_{,1}\} \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{J^2}\{-f_{,1}f_{,2}, 1 + f_{,1}^2, f_{,2}\} \quad (2.3)$$

La sollecitazione generalizzata di membrana agente su  $S$  è definita dal tensore di tensione superficiale  $\mathbf{T}$ , rappresentato nella base covariante come:

$$\mathbf{T} = T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \quad (2.4)$$

dove  $T^{\alpha\beta}$  rappresentano le componenti controvarianti di  $\mathbf{T}$ , e dove la ripetizione degli indici  $\alpha, \beta, \gamma \dots = 1, 2$  sottintende la somma.

Sono necessarie alcune manipolazioni matematiche al fine di trasformare le componenti controvarianti della tensione in quelle cartesiane. Per equilibrio, la divergenza del tensore  $\mathbf{T}$  bilancia il carico  $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$  definito per unità di superficie su  $S$ :

$$\frac{\partial}{\partial x_\gamma} (T^{\alpha\beta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta) \mathbf{a}^\gamma + \mathbf{q} = 0 \quad (2.5)$$

Descrivendo l'equilibrio membranale di un guscio sottile sotto l'azione di un carico  $\mathbf{q}$  attraverso la trattazione alla Pucher [Ventsel, E., & Krauthammer, T., 2001 [105]], le componenti di sollecitazione controvariante generalizzate  $T^{\alpha\beta}$  sulla superficie della membrana vengono trasformate in componenti di tensione  $S_{\alpha\beta} = JT^{\alpha\beta}$  proiettate in pianta. In questo modo l'equazione (2.5), proiettata nel sistema non ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m} = \mathbf{a}_3\}$ , diventa:

$$S_{11,1} + S_{12,2} + p_1 = 0, \quad S_{21,1} + S_{22,2} + p_2 = 0, \quad S_{\alpha\beta} f_{,\alpha\beta} - p_\gamma f_{,\gamma} + p_3 = 0 \quad (2.6)$$

dove  $\mathbf{p} = J\mathbf{q}$  è il carico per unità di area proiettata. Utilizzando le sollecitazioni proiettate, le prime due equazioni di equilibrio diventano identiche a quelle del problema tensionale piano.

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

Nel caso di carico puramente verticale  $\mathbf{p} = \{0, 0, -p\}$ , il problema può essere risolto introducendo la funzione di tensione di Airy  $F(x_1, x_2)$  nella forma:

$$S_{11} = F_{,22}, \quad S_{22} = F_{,11}, \quad S_{12} = S_{21} = -F_{,12} \quad (2.7)$$

L'equilibrio trasversale corrisponde al bilanciamento della componente verticale della forza  $p_3 = -p$  con il prodotto scalare del tensore di tensione di Pucher moltiplicato per l'Hessiano della funzione  $f$  in forma covariante. La funzione di tensione di Airy viene riscritta nella seguente forma:

$$F_{,22}f_{,11} + F_{,11}f_{,22} - 2F_{,12}f_{,12} = p \quad (2.8)$$

Si assume un modello di materiale rigido non reagente a trazione, nei termini stabiliti dalla teoria di [Heyman, J., 1966 [57]], in modo da imporre che la tensione generalizzata  $\mathbf{T}$  sia semidefinita negativa e che non lavori per lo spostamento corrispondente  $\mathbf{E}$ , semidefinito positivo:

$$\mathbf{T} \in \text{Sym}^-, \quad \mathbf{E} \in \text{Sym}^+, \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2.9)$$

In questo modo sia il tensore della tensione superficiale che la matrice delle tensioni proiettate devono essere semidefinite negative, potendo esprimere la concavità della funzione  $F(x_1, x_2)$  come:

$$F_{,11} + F_{,22} \leq 0, \quad F_{,11}F_{,22} - F_{,12}^2 \geq 0 \quad (2.10)$$

La sola condizione di continuità di  $F$  non basta ad evitare la presenza di pieghe. In questo caso la tensione proiettata è una delta di Dirac definita lungo una linea corrispondente alla proiezione  $\Gamma$  della piega. L'Hessiano  $\mathbf{H}$  di  $F$  è singolarmente trasversale a  $\Gamma$ , e presenta una parte singolare uniassiale parallela al vettore unitario  $\mathbf{h}$  normale a  $\Gamma$ . La derivata direzionale di  $F$  nella direzione di  $\mathbf{h}$ , chiamata  $F_h$ , presenta un salto, pertanto la parte singolare dell'Hessiano  $\mathbf{H}$  di  $F$  può essere scritta come:

$$\mathbf{H}_s = \delta(\Gamma)\Delta F_h \mathbf{h} \otimes \mathbf{h} \quad (2.11)$$

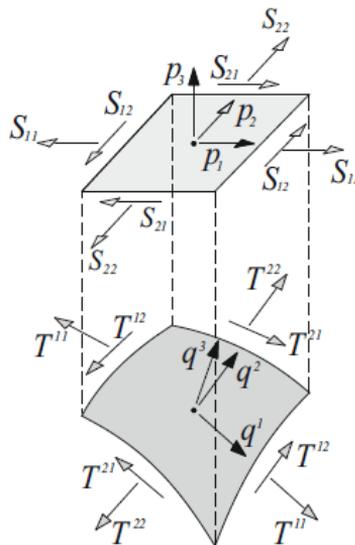


Figura 2.21: Tensioni membranali agenti su un elemento a guscio

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

dove  $\delta(\Gamma)$  è la delta di Dirac definita su  $\Gamma$ , e  $\Delta F_h$  è il salto di pendenza lungo la direzione  $\mathbf{h}$ . Analogamente la parte singolare della tensione proiettata corrispondente è una delta di Dirac su  $\Gamma$ :

$$\mathbf{S}_s = \delta(\Gamma)\Delta F_h \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} \quad (2.12)$$

dove  $\mathbf{k}$  è il vettore unitario tangente a  $\Gamma$ . La concavità di  $F$  implica la concavità della piega  $\Gamma$ , dunque  $\Delta F_h$  è negativo e la corrispondente proiezione della tensione singolare concentrata su  $\Gamma$  è di compressione. Per risolvere l'equilibrio della membrana unilaterale  $S$ , sollecitata da un carico puramente verticale, è necessario trovare una funzione di sforzo concava  $F(x_1, x_2)$  che soddisfi l'equazione (2.8) con condizioni al contorno del tipo:

$$F(x_1, x_2) = g(x_1, x_2) \quad \text{o} \quad \frac{dF}{dn} = h(x_1, x_2) \quad \text{su} \quad \partial\Omega \quad (2.13)$$

essendo  $g(x_1, x_2)$  e  $h(x_1, x_2)$ , rispettivamente, il momento interno di contatto e la forza di taglio prodotti dalle trazioni associate su una struttura intelaiata con forma  $\partial\Omega$ . Nei casi studio riguardanti cupole e scale a chiocciola basate su forme circolari, la descrizione alla Monge della superficie  $S$  in coordinate polari  $\{\theta^1 = r, \theta^2 = \theta\}$  risulta essere più conveniente:

$$\mathbf{x} = \{r \cos \theta, r \sin \theta, f(r, \theta)\}, \quad \{x_1, x_2\} \in \Omega \quad (2.14)$$

Con l'approccio di Pucher la tensione generalizzata sulla superficie della membrana viene trasformata in tensione proiettata in pianta, e nella base covariante associata al sistema di riferimento polare è possibile definire:

$$\mathbf{b}_1 = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \mathbf{b}_2 = \{-r \sin \theta, r \cos \theta\} \quad (2.15)$$

a cui è associata la base ortonormale variabile:

$$\mathbf{k}_1 = \{\cos \theta, \sin \theta\}, \quad \mathbf{k}_2 = \{-\sin \theta, \cos \theta\} \quad (2.16)$$

La tensione proiettata  $\mathbf{S}$  può essere rappresentata come:

$$\mathbf{S} = S^{\alpha\beta} \mathbf{b}_\alpha \otimes \mathbf{b}_\beta = \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{k}_\alpha \otimes \mathbf{k}_\beta \quad (2.17)$$

dove  $S^{\alpha\beta}, \sigma_{11} = \sigma_{rr}, \sigma_{22} = \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{\theta r}$  sono le componenti controvarianti e le componenti fisiche della tensione proiettata nel sistema di riferimento

---

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

polare. Le equazioni di equilibrio in  $\Omega$  sono quelle del problema piano di tensione, dunque, per il caso generale di carico distribuito definito per unità di area proiettata  $\mathbf{p} = p^1 \mathbf{b}_1 + p^2 \mathbf{b}_2 - p \mathbf{e}_3 = p_r \mathbf{k}_1 + p_\theta \mathbf{k}_2 - p \mathbf{e}_3$ , queste sono:

$$S_{/1}^{11} + S_{/2}^{12} + p^1 = 0, \quad S_{/1}^{21} + S_{/2}^{22} + p^2 = 0 \quad (2.18)$$

dove  $/\alpha$  è la derivata covariante rispetto a  $\theta^\alpha$ . In caso di puro carico verticale, le componenti di sollecitazione possono essere espresse tramite la funzione di sollecitazione  $F$  come segue:

$$S^{11} = \left( \frac{1}{r} F_{,1} + \frac{1}{r^2} F_{,22} \right), \quad S^{22} = \frac{1}{r^2} F_{,11}, \quad S^{12} = -\frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} F_{,2} \right)_{,1} \quad (2.19)$$

dove la virgola seguita da  $\alpha$  denota la differenziazione rispetto a  $\theta^\alpha$ . L'equazione di equilibrio trasversale si legge:

$$S^{\alpha\beta} f_{/\alpha\beta} - p^\gamma f_{,\gamma} - p = 0 \quad (2.20)$$

e può essere riscritta in termini di componenti della tensione:

$$S^{11} = \sigma_{rr}, \quad S^{22} = \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta\theta}, \quad S^{12} = \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} \quad (2.21)$$

con

$$f_{/11} = f_{,11}, \quad f_{/22} = r^2 \left( \frac{1}{r} f_{,1} + \frac{1}{r^2} f_{,22} \right), \quad f_{/12} = r \left( \frac{1}{r} F_{,2} \right)_{,1} \quad (2.22)$$

Dunque, le equazioni di equilibrio possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} - \frac{\sigma_{\theta\theta}}{r} + p_r = 0, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\sigma_{\theta r})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + p_\theta = 0, \\ \sigma_{rr} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \sigma_{\theta\theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} \right) + 2\sigma_{r\theta} \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial\theta} \right)}{\partial r} - p_r \frac{\partial f}{\partial r} - p_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial\theta} = p \end{aligned} \quad (2.23)$$

dove:

$$\sigma_{rr} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial\theta} \right)}{\partial r} \quad (2.24)$$

## Il problema dell'equilibrio per le strutture in muratura

---

In questo modo l'ultima espressione dell'equazione (2.23), riscritta in coordinate polari, diventa:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\right) - 2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)}{\partial r} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}\right)}{\partial r} = p \quad (2.25)$$

## Capitolo 3

# L'analisi tramite reti di spinta

### 3.1 Condizioni di equilibrio delle reti di spinta

Se la condizione di equilibrio di un arco in muratura può essere verificata attraverso la ricerca del poligono funicolare dei carichi, per una struttura voltata in muratura può essere utile considerare una rete di spinte agenti all'interno della struttura, in equilibrio con i carichi a questa applicati. Tale rete, descritta per mezzo di  $N_n$  nodi e  $N_b$  rami che collegano coppie di nodi, non viene utilizzata per modellare geometricamente il volume occupato dalla struttura voltata, come avviene nella modellazione ad elementi finiti, bensì è rappresentativa unicamente delle forze di compressione interne che si sviluppano al fine di equilibrare i carichi esterni. Di conseguenza i rami della rete sono indicativi della direzione di tali spinte, proprio come i rami di un poligono funicolare dei carichi lo sono per un arco.

L' $n$ -esimo nodo della rete è caratterizzato dalla sua posizione spaziale, definita da una terna di coordinate cartesiane  $(x_n, y_n, z_n)$ , all'interno della quale  $z$  rappresenta la direzione verticale. Dunque il generico ramo  $b$  della rete è identificato dalla posizione dei suoi due nodi terminali e dal corrispondente valore della spinta, indicato come  $\mathbf{t}^{(b)} = (t_x^{(b)}, t_y^{(b)}, t_z^{(b)})$ . Ogni nodo è soggetto ad una forza esterna  $\mathbf{f}^{(n)} = (f_x^{(n)}, f_y^{(n)}, f_z^{(n)})$  il cui valore dipende dalla sua regione di influenza, nonché dalle spinte relative ai rami di collegamento. Dovendo indivi-

## L'analisi tramite reti di spinta

---

duare esclusivamente forze di compressione, questi rami sono orientati verso il nodo  $n$ .

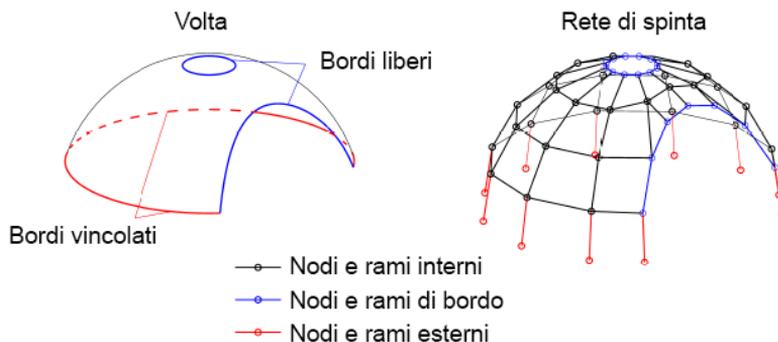


Figura 3.1: Esempio di rete di spinta per una cupola con oculo centrale

In base alla propria posizione relativa all'interno della rete, i rami possono essere catalogati in: rami interni, rappresentanti le spinte interne alla rete, rami di bordo, indicativi delle forze sul bordo libero, e rami esterni, che definiscono le reazioni vincolari di supporto della struttura voltata. Seguendo la medesima logica è possibile fornire una classificazione del tutto analoga dei nodi di connessione dei vari rami, in modo tale che la rete risulti composta da  $N_i$  nodi interni,  $N_e$  nodi di bordo e  $N_r$  nodi esterni, cfr. figure 3.1 e 3.2.

Nei problemi di verifica di strutture spaziali esistenti, quali volte e scale elicoidali in muratura, la posizione orizzontale dei nodi interni ed esterni è assegnata arbitrariamente, dovendo rispettare alcune condizioni geometriche iniziali relative alla reale forma del manufatto da analizzare, mentre le coordinate dei nodi di bordo risultano incognite. Ciò è dovuto al fatto che i rami collegati da nodi di bordo devono necessariamente essere funicolari, sia in direzione orizzontale che verticale, delle spinte interne e dei carichi esterni applicati convergenti proprio verso i nodi del bordo.

Vengono utilizzate delle equazioni di equilibrio al fine di calcolare l'entità delle spinte dei rami, le altezze dei nodi interni ed esterni e le coordinate spaziali dei nodi di bordo. Tali equazioni sono scritte soltanto per quanto riguarda i nodi interni e quelli di bordo, poiché i nodi e i rami esterni sono funzionali alla modellazione delle condizioni di vincolo della struttura. Le forze che entrano in gioco nell'equilibrio orizzontale del generico  $n$ -esimo nodo della rete rappresentano le componenti  $f_x^{(n)}$  e  $f_y^{(n)}$  dei carichi esterni, e le componenti orizzontali

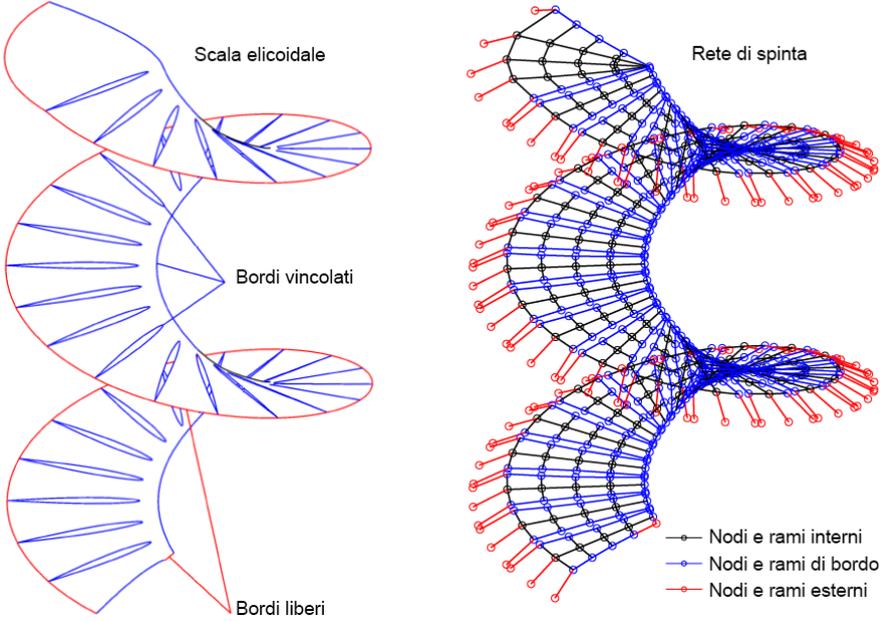


Figura 3.2: Esempio di rete di spinta per una scala elicoidale con apertura centrale

$t_x^{(b)}$  e  $t_y^{(b)}$  della spinta rispetto ai rami connessi al nodo. Dunque la condizione di equilibrio orizzontale può essere scritta come:

$$\sum_{b \in B_n} t_x^{(b)} + f_x^{(n)} = 0 \quad \sum_{b \in B_n} t_y^{(b)} + f_y^{(n)} = 0 \quad (3.1)$$

dove  $B_n$  rappresenta l'insieme dei  $b$  rami convergenti nel nodo  $n$ . Definendo con  $n$  e  $m^{(b)}$  gli indici dei due nodi collegati dal ramo generico  $b \in B_n$ , i coseni direttori del vettore  $(t_x^{(b)}, t_y^{(b)})$  possono essere valutati attraverso le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \frac{t_x^{(b)}}{\sqrt{t_x^{(b)2} + t_y^{(b)2}}} &= \frac{x_n - x_m^{(b)}}{\sqrt{(x_n - x_m^{(b)})^2 + (y_n - y_m^{(b)})^2}} &\Leftrightarrow \frac{t_x^{(b)}}{t_h^{(b)}} &= \frac{x_n - x_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \\ \frac{t_y^{(b)}}{\sqrt{t_x^{(b)2} + t_y^{(b)2}}} &= \frac{y_n - y_m^{(b)}}{\sqrt{(x_n - x_m^{(b)})^2 + (y_n - y_m^{(b)})^2}} &\Leftrightarrow \frac{t_y^{(b)}}{t_h^{(b)}} &= \frac{y_n - y_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

## L'analisi tramite reti di spinta

---

dove  $t_h^{(b)}$  è la norma della proiezione orizzontale della spinta nel  $b$ -esimo ramo, mentre  $\ell_h^{(b)}$  rappresenta la lunghezza della sua proiezione orizzontale. Sostituendo le equazioni (3.2) nell'espressione (3.1) si ottiene:

$$\sum_{b \in B_n} \frac{x_n - x_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} t_h^{(b)} + f_x^{(n)} = 0 \quad \sum_{b \in B_n} \frac{y_n - y_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} t_h^{(b)} + f_y^{(n)} = 0 \quad (3.3)$$

Le equazioni precedenti possono essere riscritte esprimendo le componenti orizzontali della spinta  $t_h^{(b)}$  attraverso il prodotto tra il parametro  $\zeta$  e la spinta di riferimento  $\hat{t}_h^{(b)}$ . Di conseguenza per il generico  $b$ -esimo ramo si ha:

$$t_h^{(b)} = \zeta \hat{t}_h^{(b)} = \frac{1}{r} \hat{t}_h^{(b)} \quad (3.4)$$

e le equazioni (3.3) si trasformano in:

$$\sum_{b \in B_n} \frac{x_n - x_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \hat{t}_h^{(b)} + f_x^{(n)} r = 0 \quad \sum_{b \in B_n} \frac{y_n - y_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \hat{t}_h^{(b)} + f_y^{(n)} r = 0 \quad (3.5)$$

Se la struttura voltata possiede almeno un nodo di bordo, risulta sicuramente conveniente riscrivere le equazioni precedenti (3.5) nella seguente forma:

$$\sum_{b \in B_n} \left[ \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} x_n - \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} x_m^{(b)} \right] + f_x^{(n)} r = 0 \quad \sum_{b \in B_n} \left[ \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} y_n - \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} y_m^{(b)} \right] + f_y^{(n)} r = 0 \quad (3.6)$$

dove i rapporti  $\hat{t}_h^{(b)}/\ell_h^{(b)}$  rappresentano le densità di spinta di riferimento relative ai singoli rami della rete.

L'equilibrio verticale del generico nodo può essere espresso come:

$$\sum_{b \in B_n} t_z^{(b)} + f_z^{(n)} = 0 \quad (3.7)$$

dove  $t_z^{(b)}$  rappresenta la componente verticale della  $b$ -esima spinta del ramo convergente verso il nodo  $n$ , mentre  $f_z^{(n)}$  è la componente verticale del carico sul nodo. In modo analogo a quanto enunciato per  $t_x^{(b)}$  e  $t_y^{(b)}$ , la componente  $t_z^{(b)}$  può essere interpretata come una funzione di  $t_h^{(b)}$  e  $\ell_h^{(b)}$ . Ricordando che la spinta  $\mathbf{t}^{(b)}$ , poiché di compressione è orientata verso il nodo  $n$ , si ha:

$$t_z^{(b)} = \frac{t_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} (z_n - z_m^{(b)}) = \zeta \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} (z_n - z_m^{(b)}) = \frac{1}{r} \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} (z_n - z_m^{(b)}) \quad (3.8)$$

all'interno della quale è stata appositamente utilizzata l'equazione (3.4). Di conseguenza la formula (3.7), relativa all'equilibrio verticale del generico nodo, può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_{b \in B_n} \frac{z_n - z_m^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \hat{t}_h^{(b)} + f_z^{(n)} r = 0 \Leftrightarrow \sum_{b \in B_n} \left[ \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} z_n - \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} z_m^{(b)} \right] + f_z^{(n)} r = 0 \quad (3.9)$$

ed utilizzata per valutare le altezze nodali incognite  $z_n$ , i cui coefficienti sono espressi mediante le densità di spinta di riferimento.

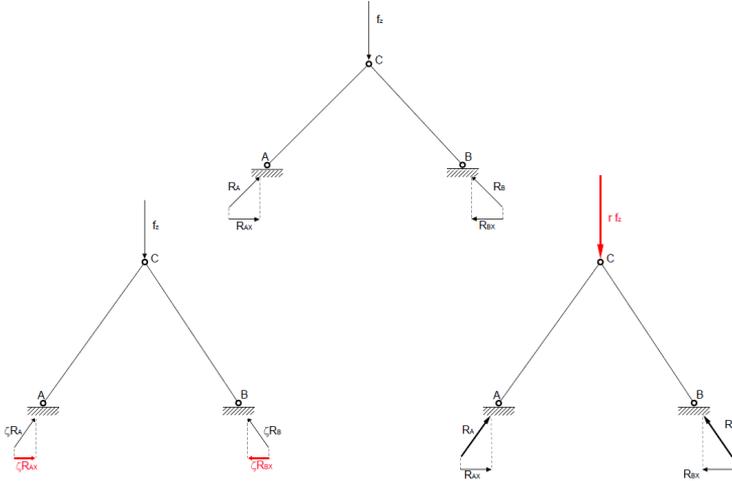


Figura 3.3: Ruolo del moltiplicatore di spinta  $\zeta = 1/r$  all'interno di una rete elementare piana di forma triangolare

Il moltiplicatore delle spinte  $\zeta = 1/r$  può essere utilizzato per modificare la configurazione geometrica assunta dalla rete al termine del processo di analisi. Al fine di chiarire concettualmente il ruolo giocato da tale parametro, si consideri la rete elementare in figura 3.3 costituita da due vincoli alla base  $A$  e  $B$ , da un nodo interno  $C$ , e da due rami  $AC$  e  $BC$  in esso convergenti, sollecitata da una forza verticale  $f_z$  concentrata in  $C$ . Imponendo arbitrariamente un valore di  $\zeta$  come moltiplicatore della componente orizzontale  $R_x$  della spinta  $R$ , si stabilisce una corrispondenza diretta proprio tra  $R_x$  e l'altezza del nodo  $C$ . In particolare la configurazione della rete a cui corrisponde il minimo valore ammissibile di  $\zeta$ , nel rispetto del Teorema Statico dell'Analisi Limite, prende

## L'analisi tramite reti di spinta

---

il nome di soluzione di minima spinta orizzontale, mentre il massimo valore ammissibile di  $\zeta$  è associato alla soluzione di massima spinta orizzontale.

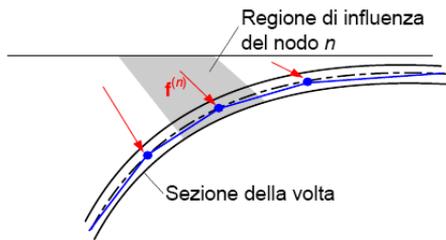


Figura 3.4: Regione di influenza associata al generico nodo della rete

La determinazione delle forze esterne applicate ai nodi della rete è relativamente agevole, poiché il sistema di carichi si considera direttamente applicato alla superficie media della volta sotto forma di forze concentrate nei nodi. Queste forze vengono calcolate a partire dal peso relativo alla regione di influenza di ciascun nodo, che ha dimensioni e forma determinate in funzione della topologia e della connettività della rete, dunque

dalla posizione relativa dei nodi e dei rami, nonché dalla direzione dei carichi applicati, cfr. figura 3.4.

Dal momento che non vengono utilizzate assunzioni relative al legame costitutivo del materiale, facendo esclusivamente riferimento agli aspetti geometrici della struttura, non è possibile tenere conto dell'interazione strutturale con altri elementi collegati ad essa, come ad esempio rinterri e tiranti. Le azioni esercitate da questi elementi devono essere calcolate separatamente ed introdotte come forze esterne applicate ai nodi, posizionate nei punti di connessione alla struttura.

## 3.2 Reti di spinta soggette ai carichi verticali

Nel caso di reti di spinta caricate verticalmente, in assenza di nodi di bordo, le equazioni di equilibrio ottenute in precedenza vengono risolte impiegando due differenti procedure di ottimizzazione lineare. La prima viene utilizzata per valutare le componenti orizzontali delle spinte nei rami, mentre con la seconda è possibile valutare le altezze nodali  $\mathbf{z}$  ed il moltiplicatore di spinta  $\zeta = 1/r$ .

A tal fine si presume che i nodi siano caricati soltanto da forze verticali, dunque, la condizione relativa alle forze orizzontali è  $f_x^{(n)} = f_y^{(n)} = 0$ . Le coordinate orizzontali  $x_n$  e  $y_n$  dei nodi interni ed esterni sono arbitrariamente assegnate, vista l'assenza dei nodi di bordo  $N_e = 0$  e  $N_n = N_i + N_r$ . Avendo assunto la presenza di soli carichi verticali, le componenti orizzontali dei carichi nodali sono nulle, pertanto le  $2N_i$  equazioni che descrivono l'equilibrio orizzontale dei nodi interni possono essere scritte in forma matriciale secondo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{t}}_h = \mathbf{0}_i \\ \mathbf{S}_i \hat{\mathbf{t}}_h = \mathbf{0}_i \end{cases} \quad (3.10)$$

dove  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{S}_i$  rappresentano le matrici dei coefficienti che contengono i coseni direttori delle proiezioni orizzontali dei rami della rete; qui il pedice  $i$  indica che si sta considerando solo ed esclusivamente l'equilibrio relativo ai nodi interni. Il vettore  $\hat{\mathbf{t}}_h$  che appare nel sistema raccoglie le spinte di riferimento  $\hat{t}_h^{(b)}$  dei rami, mentre  $\mathbf{0}_i$  è un vettore di  $N_i$  zeri.

Le equazioni (3.10) corrispondono all'equilibrio dei nodi interni di un reticolo piano triangolare costituito da  $N_i$  nodi e  $N_b$  rami, quindi, anche considerando una rete elementare composta da una sola maglia triangolare si otterrebbe un sistema indeterminato di equazioni, dal momento che risulta sempre valida la condizione  $2N_i \leq N_b - 3$ .

Siccome il sistema lineare (3.10) possiede sempre più incognite che equazioni disponibili, si ricerca la soluzione attraverso una procedura di ottimizzazione lineare. Al fine di escludere la soluzione banale  $\hat{\mathbf{t}}_h = \mathbf{0}$ , a cui corrisponde la configurazione di rete non caricata, si assume un insieme di condizioni  $N_b$  del tipo  $\hat{t}_h^{(b)} \geq \hat{t}_{h,\min}^{(b)}$ .

Nel metodo sviluppato da [Block, P., 2009 [21]], il valore minimo di spinta  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)}$  viene imposto pari ad un piccolo parametro scalare  $d$  comune a tutti quanti i rami. Tuttavia, non essendovi alcuna giustificazione fisica a tale ipotesi, si considera un caso più generale per il quale imporre valori differenti di spinta nei diversi rami della rete. A tal proposito è importante ricordare che le componenti  $\hat{t}_h^{(b)}$  di  $\hat{\mathbf{t}}_h$  che compaiono nelle equazioni (3.10) vengono ricava-

## L'analisi tramite reti di spinta

---

te da [Block, P., 2009 [21]] attraverso la misurazione dei rami di una griglia, geometricamente definita duale di quella composta dalle proiezioni orizzontali dei rami costituenti la rete di spinta, che rappresenta la visualizzazione grafica dell'equilibrio dei nodi sul piano orizzontale.

Nel metodo qui proposto, non essendo presente alcuna griglia duale, sono consentiti valori diversi della spinta limite inferiore  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)}$  da assegnare a ciascun ramo della rete.

Dunque la valutazione del vettore  $\hat{\mathbf{t}}_h$  viene perseguita attraverso la risoluzione del seguente problema di ottimizzazione lineare:

$$\min_{\hat{\mathbf{t}}_h} (\mathbf{i}_b \cdot \hat{\mathbf{t}}_h) \text{ tale che } \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{S}_i \end{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_h = \mathbf{0}_{2i} \\ \hat{\mathbf{t}}_h \geq \hat{\mathbf{t}}_{h,\min} \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $\mathbf{i}_b = (1, 1, \dots, 1)$  ha  $N_b$  componenti, in modo tale che il prodotto  $\mathbf{i}_b \cdot \hat{\mathbf{t}}_h$  rappresenti la somma di tutte le componenti di  $\hat{\mathbf{t}}_h$ . Questa particolare scelta per la funzione obiettivo è utile al fine di ottenere un valore di  $\hat{\mathbf{t}}_h$  quanto più prossimo ai valori  $\hat{\mathbf{t}}_{h,\min}$  assegnati.

I coefficienti  $\mathbf{C}_i$  e  $\mathbf{S}_i$  nelle equazioni (3.10) e (3.11) si ottengono selezionando le righe relative ai nodi interni dalle due matrici  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{S}$  contenenti i coseni direttori di tutti i rami della rete. Queste vengono costruite assemblando i contributi dei rami per tutti gli  $N_i$  nodi, in particolare, il ramo generico  $b$  che collega i nodi  $n$  e  $m^{(b)}$  contribuisce alla  $b$ -esima colonna di  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{S}$  attraverso i seguenti termini:

$$\mathbf{C}^{(b)} = \frac{1}{\ell_h^{(b)}} \begin{bmatrix} x_n - x_m^{(b)} \\ x_m^{(b)} - x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}^{(b)} = \frac{1}{\ell_h^{(b)}} \begin{bmatrix} y_n - y_m^{(b)} \\ y_m^{(b)} - y_n \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

che sono assemblati nelle righe  $n$  e  $m^{(b)}$ .

Il problema di ottimizzazione lineare (3.11) comporta una drastica riduzione del numero di condizioni di uguaglianza imposte nella formulazione originale, conducendo alla stessa soluzione finale attraverso un miglioramento delle prestazioni computazionali.

Per quanto riguarda il calcolo delle altezze nodali della rete, è necessario definire un ulteriore problema di ottimizzazione lineare. Estendendo l'equilibrio verticale (3.9)<sub>2</sub> a tutti i nodi interni, si ottiene un sistema di equazioni lineari esprimibile nella seguente forma matriciale:

$$\mathbf{D}_i \mathbf{z} + \mathbf{f}_{z,i} r = \mathbf{0}_i \quad (3.13)$$

dove le componenti di  $\mathbf{D}_i$  rappresentano una combinazione delle densità di spinta di riferimento dei rami della rete, ed il pedice  $i$ , anche in questo caso, viene utilizzato per indicare il solo equilibrio dei nodi interni. Il vettore  $\mathbf{z}$  raccoglie le altezze di tutti i nodi, mentre  $\mathbf{f}_{z,i}$  è il vettore dei carichi verticali applicati ai nodi interni. Anche questo sistema di equazioni (3.13) risulta indeterminato, dal momento che si hanno  $N_n = N_i + N_r$  altezze incognite dei nodi interni ed esterni, a cui va aggiunto il fattore  $r = 1/\zeta$ ; il numero di equazioni di equilibrio (3.13) è uguale al numero di nodi interni  $N_i$ .

Tuttavia, ricordando il ruolo fisico giocato dal moltiplicatore dei carichi  $r$  sulle altezze della rete, il sistema di equazioni (3.13) può essere risolto minimizzando o massimizzando proprio questo, a seconda del tipo di soluzione che si desidera ottenere. Di conseguenza le altezze dei nodi vengono calcolate attraverso la risoluzione di un ulteriore problema di ottimizzazione lineare:

$$\min_{\mathbf{z}, r} \pm r \text{ tale che } \begin{cases} [\mathbf{D}_i \ \mathbf{f}_{z,i}] \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{0}_i \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\min} \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ r \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\max} \\ +\infty \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.14)$$

dove  $\mathbf{z}_{\min}$  e  $\mathbf{z}_{\max}$  sono rispettivamente i limiti inferiore e superiore imposti arbitrariamente alle altezze nodali. Per i nodi interni questi limiti possono essere generalmente imposti pari alle quote di intradosso e di estradosso della struttura voltata. In alternativa, per raggiungere una compressione completa della sezione muraria, e realizzare una soluzione che sia effettivamente a vantaggio di sicurezza, questi possono essere imposti pari alle altezze corrispondenti al terzo inferiore e superiore dello spessore della volta.

La funzione obiettivo  $\pm r$  viene fissata pari a  $+r$  per ricercare una soluzione che minimizzi  $r$ , ottenendo la configurazione di massima spinta orizzontale della rete. Al contrario si fissa pari a  $-r$  per ricercare una soluzione che massimizzi  $r$  al fine di ottenere la configurazione di minima spinta orizzontale. In entrambi i casi, valori positivi di  $r$  sono assicurati dalla condizione  $0 \leq r \leq +\infty$  definita nell'espressione (3.14).

Analogamente ai coefficienti che appaiono nelle equazioni di equilibrio orizzontale, i termini di  $\mathbf{D}_i$  sono calcolati assemblando le densità di spinta di tutti quanti i rami. In particolare, per un ramo generico  $b$  connettente i nodi  $n$  e  $m^{(b)}$  della rete, i coefficienti:

$$\mathbf{D}^{(b)} = \frac{\hat{t}_h^{(b)}}{\ell_h^{(b)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

## L'analisi tramite reti di spinta

---

vengono valutati e assemblati nelle righe  $n$  e  $m^{(b)}$  delle colonne  $n$  e  $m^{(b)}$  della matrice dei coefficienti  $\mathbf{D}$ . Dunque le componenti della matrice  $\mathbf{D}_i$  che compaiono nelle equazioni (3.13) e (3.14) si ottengono selezionando le righe di  $\mathbf{D}$  corrispondenti ai nodi interni. Tutto ciò svincola il modello da calcoli complessi, nei quali i coefficienti delle equazioni di equilibrio verticale siano ottenuti moltiplicando quattro matrici contenenti connettività e lunghezze delle reti primarie e duali dell'intera rete.

Nel caso di reti di spinta caratterizzate dalla presenza di uno o più nodi di bordo, soggette a carichi verticali, le coordinate orizzontali relative a tali nodi risultano incognite, ma possono essere agevolmente valutate applicando il Force Density Method, originariamente formulato da [Schek, H.J., 1974 [99]] per la risoluzione di problemi legati alla ricerca di forma delle strutture. La sua applicazione diretta all'analisi delle reti di spinta non è particolarmente conveniente, però questo può essere combinato con una procedura di ottimizzazione lineare analoga a quella descritta in (3.11), al fine di ricercare una soluzione adeguata a tale problema.

Si presuppone che le coordinate  $x$  e  $y$  dei nodi di bordo siano posizionate sul bordo libero della struttura voltata, utilizzando l'espressione (3.11) per calcolare una distribuzione delle spinte nei rami. Questa ottimizzazione lineare impone l'equilibrio orizzontale dei nodi interni ma non di quelli di bordo, che rimangono non equilibrati. Tuttavia le spinte così calcolate possono essere utilizzate per determinare le densità di spinta per tutti i rami della rete, in modo che il Force Density Method possa essere utilizzato per ricalcolare le coordinate orizzontali dei nodi interni e di bordo, legandone in modo reciproco la condizione di equilibrio e restituendo una rete equilibrata.

L'impiego di tale metodo per la valutazione della posizione orizzontale dei nodi interni e di bordo viene implementato considerando un sistema di  $2(N_i + N_e)$  equazioni descrittive le equazioni di equilibrio orizzontale (3.6). Esprimendo questo sistema di equazioni in forma matriciale, e assumendo carichi orizzontali nulli, si ricavano le seguenti espressioni:

$$\mathbf{D}_{i+e}\mathbf{x} = \mathbf{0}_{i+e} \quad \mathbf{D}_{i+e}\mathbf{y} = \mathbf{0}_{i+e} \quad (3.16)$$

dove i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  raccolgono le coordinate  $x$  e  $y$  di tutti i nodi, mentre la matrice  $\mathbf{D}_{i+e}$  ne contiene i coefficienti delle densità di spinta di riferimento relative ai rami, considerando sempre che il pedice  $i+e$  è utilizzato per indicare il solo equilibrio dei nodi interni e di bordo. Ciò si ottiene selezionando le righe e le colonne corrispondenti a questi ultimi dalla matrice  $\mathbf{D}$ .

I vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  nelle equazioni (3.16) possono essere divisi in due sottovettori contenenti, rispettivamente, le coordinate dei nodi interni e di bordo  $\mathbf{x}_{i+e}$  e

$\mathbf{y}_{i+e}$ , e le coordinate dei nodi esterni  $\mathbf{x}_r$  e  $\mathbf{y}_r$ . Di conseguenza anche la matrice dei coefficienti  $\mathbf{D}_{i+e}$  viene partizionata considerando le colonne  $\mathbf{D}_{i+e, i+e}$  corrispondenti ai nodi interni e di bordo, e quelle  $\mathbf{D}_{i+e, r}$  corrispondenti a nodi non di bordo. Sulla base di questa assunzione, le equazioni (3.16) possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\mathbf{D}_{i+e, i+e}\mathbf{x}_{i+e} + \mathbf{D}_{i+e, r}\mathbf{x}_r = \mathbf{0}_{i+e} \quad \mathbf{D}_{i+e, i+e}\mathbf{y}_{i+e} + \mathbf{D}_{i+e, r}\mathbf{y}_r = \mathbf{0}_{i+e} \quad (3.17)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{x}_{i+e} = -\mathbf{D}_{i+e, i+e}^{-1}\mathbf{D}_{i+e, r}\mathbf{x}_r \quad \mathbf{y}_{i+e} = -\mathbf{D}_{i+e, i+e}^{-1}\mathbf{D}_{i+e, r}\mathbf{y}_r \quad (3.18)$$

essendo  $\mathbf{D}_{i+e, i+e}$  una matrice invertibile.

A seconda della geometria e della connettività della rete, la procedura descritta modifica la posizione dei nodi interni e di bordo con effetti più o meno trascurabili. Se questo effetto non dovesse risultare trascurabile, dunque la loro posizione venisse modificata significativamente dall'applicazione della formula (3.18), i carichi esterni devono essere ricalcolati, anche se ciò non compromette l'equilibrio orizzontale espresso da (3.11) e (3.18) nel caso di rete soggetta soltanto a carichi verticali. In alternativa questa procedura può essere iterata, lasciando invariata la posizione dei nodi interni e aggiornando le densità di spinta attraverso l'ottimizzazione lineare (3.11), quindi anche la posizione dei nodi di bordo per mezzo delle equazioni (3.18).

Una volta determinata la posizione dei nodi interni e di bordo, nonché le densità di spinta di riferimento, la valutazione delle altezze nodali viene eseguita come nel caso di reti sprovviste di bordi liberi, estendendo il problema di ottimizzazione lineare anche ai nodi di bordo.

### 3.3 Reti di spinta soggette ai carichi verticali e orizzontali

Per ciò che concerne le reti di spinta soggette sia a carichi verticali che orizzontali, la principale difficoltà si riscontra nella risoluzione dei sistemi di equazioni (3.3) e (3.9), che esprimono l'equilibrio orizzontale e verticale dei nodi, poiché risultano accoppiati tra loro per mezzo dell'incognita  $r$ .

Se i carichi orizzontali assumono valori diversi da zero, il sistema delle condizioni di equilibrio espresso in (3.10) diventa il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_i \mathbf{t}_h + \mathbf{f}_{x,i} r = \mathbf{0}_i \\ \mathbf{S}_i \mathbf{t}_h + \mathbf{f}_{y,i} r = \mathbf{0}_i \end{cases} \quad (3.19)$$

in modo tale che la soluzione simultanea delle equazioni di equilibrio (3.13) e (3.19) possa produrre un insieme di equazioni non lineari tale che il vettore incognito  $\mathbf{z}$ , presente proprio nell'equazione (3.13), venga moltiplicato per la matrice dei coefficienti  $\mathbf{D}_i$ , o  $\mathbf{D}_{i+e}$  se la rete è caratterizzata anche dai nodi di bordo, che a sua volta contiene le incognite  $\hat{\mathbf{t}}_h$  delle equazioni (3.19).

Quindi la non linearità del sistema di equazioni così accoppiate complica sensibilmente la procedura risolutiva già illustrata per i soli carichi verticali, poiché apparentemente non risulta possibile utilizzare in sequenza i due problemi di ottimizzazione lineare. Tuttavia la soluzione del sistema (3.19) può ancora essere raggiunta risolvendo iterativamente un problema di ottimizzazione lineare così definito:

$$\min_{\hat{\mathbf{t}}_h} (\mathbf{i}_b \cdot \hat{\mathbf{t}}_h) \text{ tale che } \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i \\ \mathbf{S}_i \end{bmatrix} \hat{\mathbf{t}}_h = - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{x,i} r \\ \mathbf{f}_{y,i} r \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{t}}_h \geq \hat{\mathbf{t}}_{h,\min} \end{cases} \quad (3.20)$$

che diventa simile a quello in (3.11) se si imposta un valore di primo tentativo  $r^{(j)}$  per  $r$ . A loro volta le spinte di riferimento  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(j)}$ , ottenute dalla soluzione di tale problema di ottimizzazione lineare (3.20), sono utilizzate per valutare le coordinate  $x$  e  $y$  dei nodi di bordo mediante le equazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+e} &= - \left[ \mathbf{D}_{i+e}^{(j)} \right]^{-1} \left[ \mathbf{D}_{i+e}^{(j)} \mathbf{x}_r + \mathbf{f}_{x,i+e} r^{(j)} \right] \\ \mathbf{y}_{i+e} &= - \left[ \mathbf{D}_{i+e}^{(j)} \right]^{-1} \left[ \mathbf{D}_{i+e}^{(j)} \mathbf{y}_r + \mathbf{f}_{y,i+e} r^{(j)} \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

che rappresentano l'estensione di (3.18) al caso di reti di spinta soggette anche ad un sistema di carichi orizzontali.

Inoltre le spinte di riferimento  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(j)}$  sono utilizzate nell'equazione (3.14) in modo da ottenere valori provvisori delle altezze nodali, oltre ad un valore aggiornato di  $r$  denominato  $r^{(j+1)}$ . Questo nuovo valore di  $r$  viene riutilizzato come valore di tentativo in (3.20), in modo da iterare il processo fino a quando la differenza tra il valore temporaneo  $r^{(j)}$  utilizzato in (3.20), e il valore della soluzione  $r^{(j+1)}$  restituito da (3.14), non diventi inferiore di un determinato valore di tolleranza.

Indicando con  $I$  il numero di iterazioni necessarie al raggiungimento della condizione di convergenza, l'approccio proposto prevede la risoluzione di una sequenza di  $2I$  ottimizzazioni lineari. Tuttavia se la rete non possiede alcun nodo di bordo, notando che le equazioni in (3.20) sono lineari rispetto a  $r$ , il numero di problemi di ottimizzazione da risolvere può essere significativamente ridotto; da ciò è possibile derivare una procedura iterativa ottimizzata.

Poiché le condizioni di uguaglianza e disuguaglianza in (3.20) risultano lineari, la soluzione generica  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(j)}$  corrispondente ad un determinato valore di  $r^{(j)}$  può essere espressa come:

$$\hat{\mathbf{t}}_h^{(j)} = \hat{\mathbf{t}}_h^{(0)} + \frac{r^{(j)}}{r^{(1)}} \left[ \hat{\mathbf{t}}_h^{(1)} - \hat{\mathbf{t}}_h^{(0)} \right] \quad \text{se } r^{(j)} \geq r^{(1)} \quad (3.22)$$

dove  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(0)}$  e  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(1)}$  sono le spinte di riferimento restituite dall'ottimizzazione lineare (3.20) in cui sono state impostate le condizioni  $r = r^{(0)} = 0$  e  $r = r^{(1)} = r_1$ , con  $r_1$  scalare arbitrario positivo.

È agevole verificare come l'espressione (3.22) soddisfi le condizioni di uguaglianza e disuguaglianza indicate in (3.20), purché sia rispettato il vincolo  $r^{(j)} > r_1$ . Quindi le spinte associate a  $r^{(j)}$  possono essere assunte come una soluzione che soddisfi l'equilibrio orizzontale dei nodi, consentendo di risolvere solo due volte il problema di ottimizzazione lineare (3.20).

Una volta valutati  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(0)}$  e  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(1)}$ , le spinte di riferimento  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(1)}$  sono utilizzate sia in (3.21) per aggiornare le coordinate  $x$  e  $y$  dei nodi di bordo, sia in (3.14) per ottenere le altezze nodali e il valore provvisorio  $r^{(j)}$ . Tale stima di  $r$  è utilizzata successivamente in (3.22) per ottenere un nuovo valore della spinta di riferimento, che a sua volta viene utilizzato nuovamente in (3.21) e (3.14) per ottenere una nuova stima  $r^{(j+1)}$  di  $r$ .

La procedura viene iterata fino a quando la differenza tra due stime successive di  $r$  si attesta ad un valore inferiore di una determinata tolleranza:

$$\left| \frac{r^{(j+1)} - r^{(j)}}{r^{(j)}} \right| < tol \quad (3.23)$$

## L'analisi tramite reti di spinta

---

In conclusione, la procedura risolutiva ottimizzata equivale a risolvere due problemi preliminari di ottimizzazione lineare (3.20), rappresentanti l'equilibrio orizzontale della rete associata ai valori  $r = r^{(0)} = 0$  e  $r = r^{(1)} = r_1$ . Questi sono seguiti da una sequenza di  $I$  sistemi lineari di equazioni (3.21) da risolvere solo in presenza di aperture, e di  $I$  problemi di ottimizzazione lineare (3.14) rappresentanti l'equilibrio verticale della rete associato a valori progressivamente crescenti di  $r$ , a partire proprio da  $r_1$ .

È importante sottolineare che la condizione  $r > r_1$  non viene generalmente soddisfatta durante le iterazioni, tuttavia se  $r_1$  si presume sufficientemente piccolo, la procedura iterativa precedentemente descritta genera una sequenza di stime che si avvicina monotonicamente al valore finale di  $r$ , soddisfacendo ad ogni iterazione la condizione  $r^{(j+1)} > r^{(j)}$ .

Ovviamente tale procedura semplificata attraverso l'applicazione della formula (3.22) può essere applicata solo in assenza di nodi di bordo, infatti, poiché la posizione di questi varia in funzione dei carichi orizzontali applicati per mezzo di (3.21), la relazione lineare tra  $\hat{\mathbf{t}}_h^{(j)}$  e  $r^{(j)}$ , espressa da (3.22), non risulta verificata.

## Capitolo 4

# Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

### 4.1 Arco semicircolare in conci radiali

Si analizza nel dettaglio il caso relativo ad un arco semicircolare in muratura di centro  $C_x = 1.125\text{ m}$  e  $C_z = 2\text{ m}$  nel piano  $x - z$ . Questo possiede un diametro interno pari a  $1.95\text{ m}$  e un diametro esterno di  $2.55\text{ m}$ , ed essendo un caso piano è possibile schematizzarne le spinte interne attraverso un'unica rete elementare composta da 16 nodi e 15 rami. Le coordinate  $y$  dei nodi sono nulle, mentre le coordinate  $x$  variano tra 0 e  $2.25\text{ m}$  secondo intervalli di  $0.15\text{ m}$ .

Il limite inferiore  $z_{\min}$  imposto alle altezze nodali è pari alla quota di intradosso dell'arco, mentre il limite superiore  $z_{\max}$  è fissato pari alla sua quota di estradosso, entrambe misurate verticalmente.

I carichi verticali  $f_z$ , intesi come forze concentrate applicate direttamente ai nodi della rete in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati sulla base del peso della massa muraria contenuta all'interno della regione di influenza di ognuno di questi, assumendo un peso specifico medio pari a  $25\text{ kN/m}^3$ , indicativo di una generica muratura in pietrame.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete elementare *Arco 1* soggetta all'azione dei soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.1.

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

Qui le linee colorate continue indicano la direzione e il valore della spinta interna in ogni ramo, in relazione al sistema di carichi applicato, mentre il dominio fisico entro il quale la rete possiede un margine di variazione della propria posizione spaziale è rappresentato mediante linee tratteggiate in nero. I punti in cui le altezze dei nodi raggiungono i valori limite  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  sono evidenziati tramite cerchi in nero.

Nella soluzione di minima spinta, la rete elementare entra in contatto con l'estradosso della copertura in due punti posizionati in chiave, e all'intradosso nei due punti corrispondenti alle imposte dell'arco. La soluzione di massima spinta, invece, delinea una configurazione geometrica nella quale la rete risulta tangente nei due punti in chiave all'intradosso e nei due punti corrispondenti alle imposte all'estradosso.

Si sottopone la struttura anche ad azioni orizzontali  $f_x$ , applicate ai nodi in direzione dell'ascissa  $x$  e proporzionali alle forze verticali  $f_z$ . Imponendo una combinazione dei suddetti carichi pari a  $f_x = 0.3 f_z$ , si ottengono le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete elementare *Arco 2* riportate in figura 4.2. Dall'osservazione dei relativi diagrammi è possibile notare come la configurazione delle spinte interne alla struttura vada a contrastare proprio l'azione orizzontale  $f_x$  nella sua direzione di applicazione.

Mantenendo fissa l'entità delle forze verticali  $f_z$ , viene aumentato progressivamente il valore delle forze orizzontali  $f_x$ . In particolare si riportano in figura 4.3 le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete elementare *Arco 3* soggetta alla combinazione dei carichi  $f_x = 0.6 f_z$ , mentre in figura 4.4 sono illustrate le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Arco 4* soggetta alla combinazione  $f_x = 0.9 f_z$ .

Continuando ad incrementare il valore dei carichi orizzontali  $f_x$ , l'arco raggiunge la sua massima capacità resistente nei confronti di questi ultimi. Ad una tale condizione corrisponde un valore del rapporto di sicurezza  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1$  ed una combinazione  $f_x = 1.2 f_z$ . Le due soluzioni limite per la corrispondente rete elementare *Arco 5*, come è possibile osservare dai diagrammi illustrati in figura 4.5, tendono a convergere verso un assetto geometrico unico, assottigliando progressivamente il fuso dei possibili stati di equilibrio interno.

Un comportamento del genere è legato alla risposta di una struttura che, venendo sempre più sollecitata da forze orizzontali  $f_x$  crescenti, passa da una configurazione di equilibrio iperstatica, caratterizzata da un sistema di equazioni staticamente indeterminato, ad una configurazione isostatica, risolvibile mediante un sistema staticamente determinato.

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

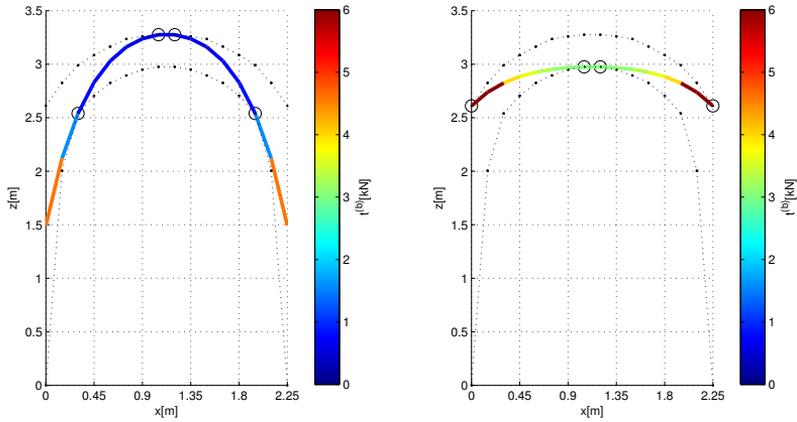


Figura 4.1: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare *Arco 1*

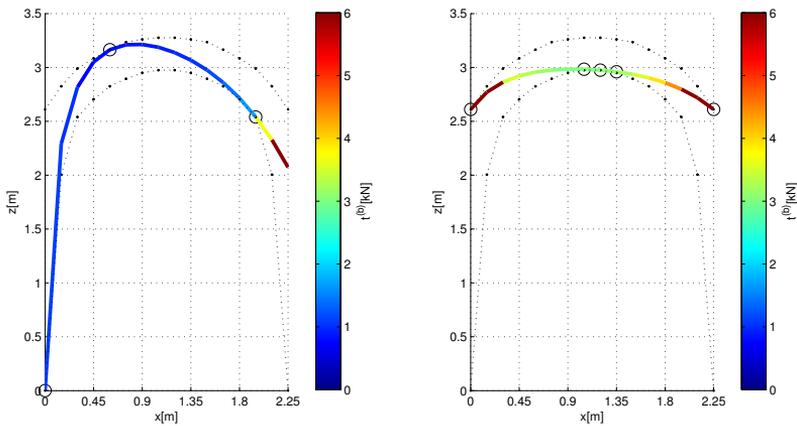


Figura 4.2: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare *Arco 2*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

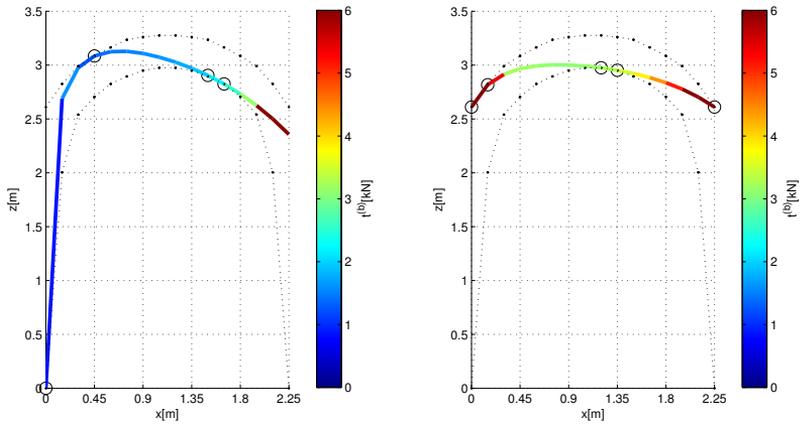


Figura 4.3: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare *Arco 3*

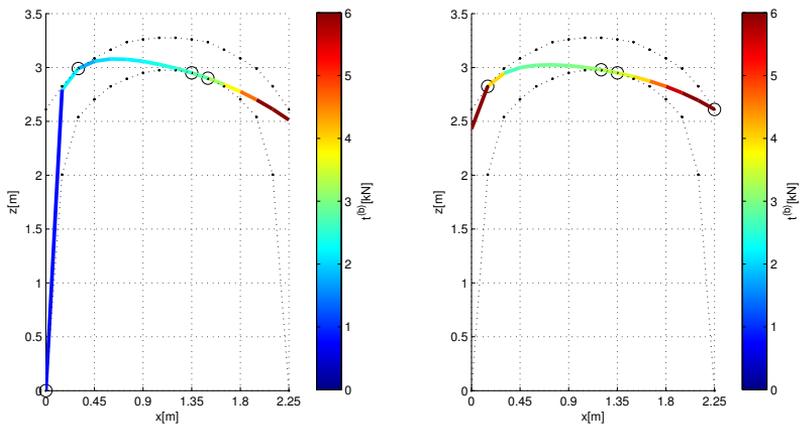


Figura 4.4: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare *Arco 4*

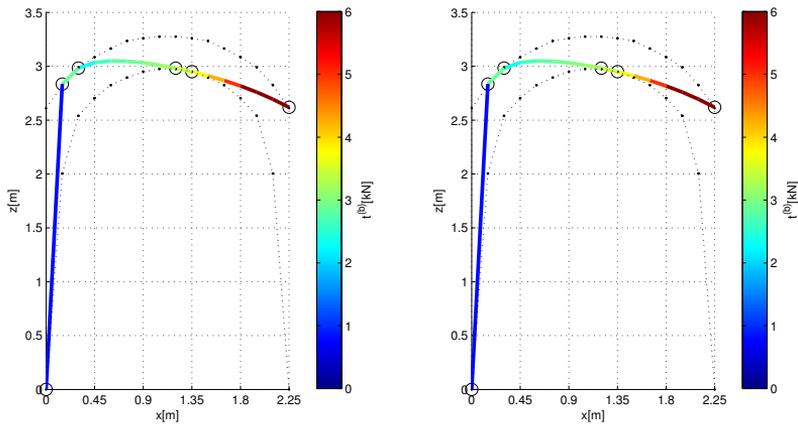


Figura 4.5: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete elementare *Arco 5*

## 4.2 Cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella

La Chiesa di Santa Maria di Monteverginella si trova all'interno del centro storico di Napoli, dove viene costruita agli inizi del XIV secolo per volere di Bartolomeo di Capua, protonotario del re Roberto d'Angiò. La si vuole realizzare intenzionalmente su alcune proprietà già esistenti nella zona, abbattendo l'edicola votiva dedicata a Santa Maria dello Spirito, e a lavori ultimati viene donata ai frati benedettini che la occupano per lungo tempo.



Figura 4.6: Vista panoramica della cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella a Napoli

Sul finire del XVI secolo la struttura gotica viene demolita e ricostruita ex-novo dall'architetto Francesco Antonio Pichiatti. Ulteriori opere di restauro si susseguono a partire dal XVII secolo fino a quando, agli inizi del XIX secolo, i benedettini vengono cacciati dalla città e il complesso è affidato prima ai chierici minori caracciolini, che dispongono alcuni importanti cambiamenti nell'organizzazione interna, poi alle suore salesiane.

Di notevole interesse architettonico è la cupola a pianta circolare, coronata in sommità da una lanterna e supportata da una struttura a tamburo alla base, cfr. figure 4.7 e 4.6. Questa possiede uno spessore di circa  $0.8\text{ m}$  lungo tutto il suo sviluppo, con leggere variazioni in prossimità dei due elementi sopra citati.

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

La rete di spinta ipotizzata per una tale struttura risulta composta da 145 nodi e 272 rami, ed è ottenuta mediante l'interconnessione di una serie di paralleli e meridiani. Sui rami che compongono i paralleli vengono arbitrariamente imposti dei valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0$ , mentre sui rami che compongono i meridiani questi sono fissati pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 1 \text{ kN}$ . Allo stesso modo i valori massimi di spinta di riferimento sono sempre considerati pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$  in tutta la rete.

I carichi verticali  $f_z$ , applicati ai nodi in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati sulla base del peso della massa muraria contenuta all'interno del dominio di influenza di ognuno di questi, assumendo un peso specifico medio pari a  $25 \text{ kN/m}^3$ . Le azioni sismiche  $f_x$  vengono modellate per mezzo di carichi statici orizzontali proporzionali alle forze verticali  $f_z$ , e applicate anch'esse ai nodi, in direzione dell'ascissa  $x$ .

Con lo scopo di calcolare il valore limite dei carichi orizzontali applicabili alla struttura, il rapporto tra le forze  $f_x/f_z$  viene progressivamente incrementato fino ad ottenere un valore del rapporto di sicurezza  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1$ .

Una prima serie di risultati attiene all'analisi della cupola allo stato attuale, sulla quale i limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  vengono imposti pari alle quote di intradosso e di estradosso della copertura, misurate verticalmente.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 1* soggetta all'azione dei soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate nelle figure 4.8 e 4.9, per le quali il rapporto di sicurezza strutturale ottenuto è pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1.2$ . Anche qui le linee colorate continue sono indicative della direzione e del valore della spinta interna in ogni ramo, mentre il dominio fisico della cupola è rappresentato mediante linee tratteggiate in nero.

Risulta evidente come le spinte si mantengano su valori mediamente bassi lungo tutti i rami che compongono i paralleli, mentre sui meridiani si riscontra un'intensificazione degli sforzi in direzione del tamburo, fino a raggiungere spinte notevoli proprio in corrispondenza di questo.

Sussistendo una simmetria assiale della rete lungo l'ascissa  $z$ , in figura 4.9 si riportano le viste bidimensionali delle soluzioni limite proiettate sul piano  $x-z$ , dove il dominio fisico della volta, invece, viene rappresentato mediante due linee continue in nero. I punti in rosso sono identificativi della posizione dei nodi tangenti a tali curve.

Si sottopone la cupola anche ad azioni orizzontali  $f_x$ , applicate ai nodi in direzione dell'ascissa  $x$  e proporzionali alle forze verticali  $f_z$ . In particolare imponendo un rapporto di sicurezza pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1$ , la cupola raggiunge la sua massima capacità resistente nei confronti dei carichi orizzontali  $f_x$  per

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

un valore di questi ultimi pari a  $f_x = 0.013 f_z$ . Nelle figure 4.10 e 4.11 si riportano le configurazioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 2* per questa particolare condizione di carico.



Figura 4.7: Ulteriore vista della cupola della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella a Napoli

Appare chiaro dall'osservazione dei diagrammi riportati nelle sezioni trasversali della cupola, come la rete delle spinte interne adatti la propria forma al fine di equilibrare i carichi orizzontali  $f_x$  diretti lungo l'asse positivo  $x$ . In realtà, sebbene contenuta interamente all'interno del dominio fisico della muratura, questa assume una configurazione caratterizzata da valori più alti della coordinata verticale sul lato corrispondente

ai valori negativi di  $x$ .

Al fine verificare l'eventuale miglioramento della risposta strutturale della cupola in relazione ai carichi applicati, questa si immagina interessata da un rinforzo applicato sulla superficie di intradosso, nella sua parte superiore. La scelta della specifica posizione è legata a considerazioni di natura estetica e conservativa, ed imposta dal fatto che tale superficie risulti priva di opere di pregio, al contrario della sua superficie di estradosso, completamente ricoperta da maioliche.

I materiali utilizzati sono compositi a matrice cementizia fibro-rinforzata, notevolmente più performanti rispetto ai classici polimeri fibro-rinforzati sia in termini di resistenza al fuoco e al calore che per quanto riguarda la permeabilità al vapore; caratteristiche, queste, di primaria importanza nel rinforzo di edifici e monumenti storici [Caggegi, C. et al., 2017 [28]].

Recenti risultati sperimentali sulle prestazioni strutturali degli archi in muratura rinforzati con compositi in tessuto di polybenzoxarale possono essere trovati in [Alecci, V. et al., 2016 [3]]. Dati ulteriori, relativi all'utilizzo di compositi in fibra di vetro rinforzata con fibra di cemento nel retrofitting sismico delle volte in muratura, sono riscontrabili in [Valvona, F., et al., 2017 [103]].

Sulla base delle ipotesi formulate nel lavoro sviluppato da [Fabbrocino, F. et al., 2015 [45]], la rete di spinta si considera libera di fuoriuscire dal dominio fisico reale della muratura. Di conseguenza il nuovo dominio geometrico ammis-

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

sibile viene ottenuto consentendo ai nodi appartenenti alla regione rinforzata di raggiungere un'ascissa verticale  $z_{\max}$ , corrispondente alla superficie ottenuta spostando radialmente l'estradosso di  $2\text{ m}$ . L'ascissa  $z_{\min}$  di ogni nodo, invece, viene conservata alla quota dell'intradosso della cupola.

Le future ricerche potranno essere dedicate a stabilire le relazioni tra lo spostamento dell'ascissa verticale  $z$  e la quantità del legante presente all'interfaccia. Diversi metodi per la validazione di eventuali ipotesi sulla capacità di tenuta dei materiali di interfaccia possono essere trovati in [Foraboschi, P., 2016 [48]] e [Sessa, S. et al., 2017 [101]]. Recenti ricerche a cura di [Malena, M. et al., 2017 [68]] e [Anil, O., et al., 2016 [9]] consentono la corretta calibrazione della resistenza del materiale legante contro il fenomeno della delaminazione, tenendo conto delle prestazioni a lungo termine e della sua durabilità [Maljaee, H. et al., 2016 [69]].

Nelle figure 4.12 e 4.13 si riportano le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 3*, relativa alla cupola rinforzata in sommità e soggetta soltanto ai carichi verticali  $f_z$ , per le quali il rapporto di sicurezza ottenuto è pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1.4$ . In particolare nelle sezioni trasversali lungo il piano  $x - z$ , la spessa linea continua in rosso è indicativa della posizione del rinforzo strutturale.

Essendo consentito alla rete di spostarsi al di fuori del dominio fisico della cupola, in prossimità della regione rinforzata, la configurazione di minima spinta orizzontale ottenuta risulta sensibilmente diversa dal caso della cupola non rinforzata.

Si sottopone la cupola così rinforzata anche ad azioni orizzontali  $f_x$ . Imponendo un rapporto di sicurezza unitario, la struttura raggiunge la massima capacità resistente nei confronti di queste per una combinazione dei carichi pari a  $f_x = 0.023 f_z$ . Le corrispondenti soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 4* sono rappresentate nelle figure 4.14 e 4.15. Questa analisi evidenzia come l'applicazione di un rinforzo strutturale in sommità, all'intradosso della cupola, quasi raddoppi la sua capacità resistente nei confronti dei carichi orizzontali  $f_x$ .

Al fine di verificare la robustezza della procedura proposta, vengono eseguite ulteriori analisi cambiando la quantità di rinforzo. In particolare le figure 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 illustrano i risultati ottenuti rinforzando solo parzialmente la parte superiore dell'intradosso della cupola. Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 5* si riferiscono alla risposta strutturale in relazione ai soli carichi verticali  $f_z$ , individuando un valore del rapporto di sicurezza pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1.3$ . Le soluzioni limite per la rete *Monteverginella 6*, ottenute imponendo un valore unitario di tale rappor-

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

to, hanno resituito un valore delle forze orizzontali massime ammissibili pari a  $f_x = 0.016 f_z$ .

Si assume una configurazione alternativa della cupola, ottenuta applicando lo stesso tipo di rinforzo strutturale all'interno del tamburo posto alla base. Il dominio geometrico ammissibile per la rete viene modificato rispetto al caso precedente, poiché si consente ai nodi ricadenti all'interno della regione rinforzata di spostarsi radialmente al di fuori del tamburo, fino ad una distanza di 2 m.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 7* soggetta ai soli carichi verticali  $f_z$ , sono riportate nelle figure 4.20 e 4.21. Questa nuova configurazione del rinforzo consente alla soluzione di massima spinta orizzontale di allargarsi nella parte inferiore della volta, uscendo dal dominio fisico reale confinato superiormente dalla linea di estradosso; in corrispondenza del tamburo rinforzato le spinte si intensificano notevolmente. L'analisi restituisce un valore del rapporto di sicurezza pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1.9$ .

Se si sottopone la cupola così rinforzata anche ai carichi orizzontali  $f_x$ , imponendo la condizione  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1$ , il valore  $f_x = 0.1 f_z$  ricavato è rappresentativo del massimo carico orizzontale  $f_x$  ammissibile per la struttura. Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 8* sono, dunque, illustrate nelle figure 4.22 e 4.23, dalle quali è possibile notare come questa nuova configurazione del rinforzo strutturale consenta alla cupola di bilanciare adeguatamente i carichi orizzontali  $f_x$ . La massima capacità resistente in relazione alle azioni orizzontali  $f_x$  diventa quasi cinque volte maggiore rispetto al caso di rinforzo applicato in sommità.

Ulteriori risultati sono riportati all'interno delle figure 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27, e sono indicativi di analisi eseguite sulla stessa cupola, variando la quantità di rinforzo applicato. Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Monteverginella 9*, per soli carichi verticali  $f_z$ , restituiscono un valore del rapporto di sicurezza pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 1.6$ . Le soluzioni limite per la rete *Monteverginella 10*, ottenute per un valore unitario di tale rapporto, hanno restituito un valore delle forze orizzontali massime ammissibili pari a  $f_x = 0.044 f_z$ .

Ripetendo la procedura descritta, cambiando di volta in volta la posizione e la quantità del rinforzo strutturale considerato, si può convenientemente avere un'idea di quale sia la scelta migliore, dunque quella più performante e allo stesso tempo maggiormente compatibile in base ad assegnati criteri economici.

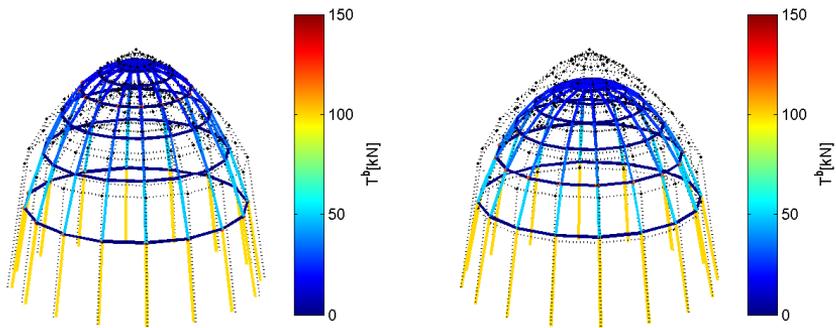


Figura 4.8: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 1*

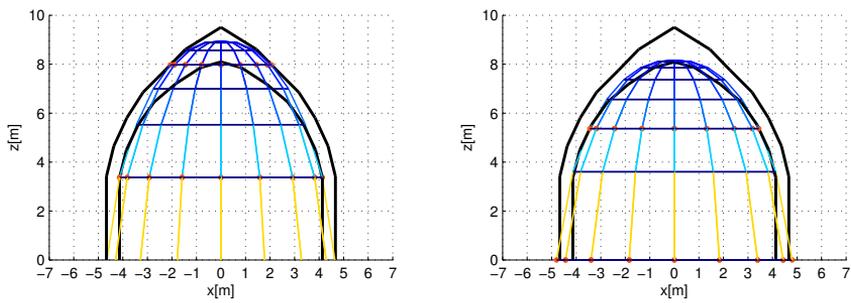


Figura 4.9: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 1*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

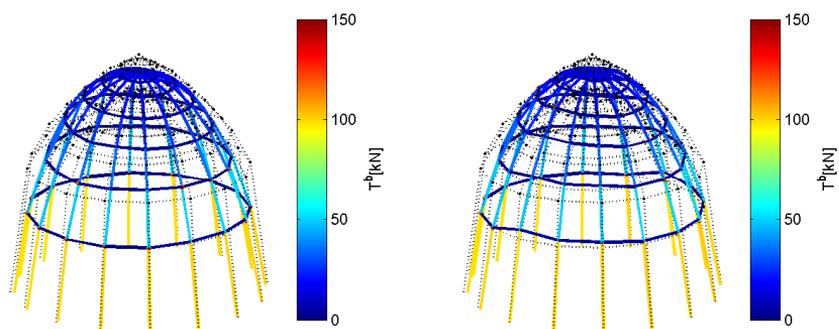


Figura 4.10: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 2*

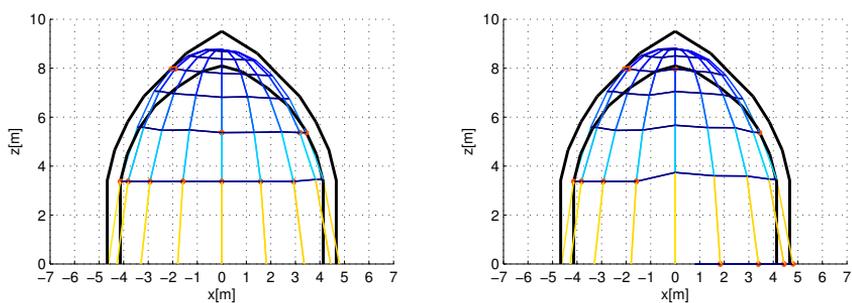


Figura 4.11: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 2*

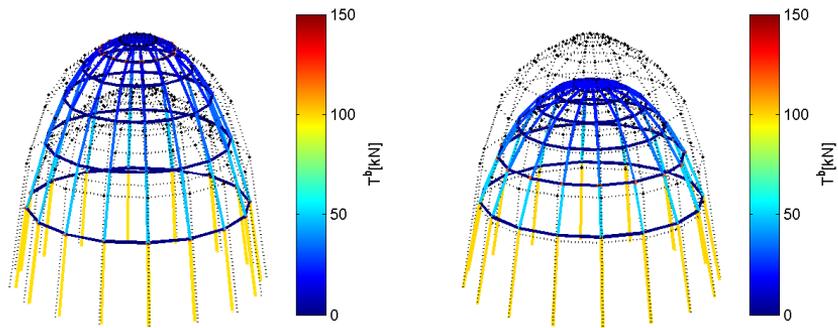


Figura 4.12: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 3*

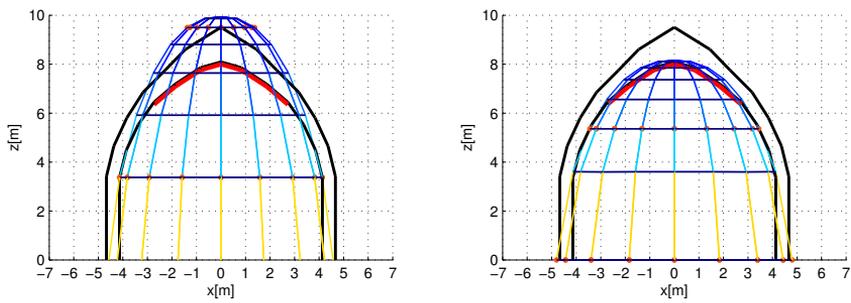


Figura 4.13: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 3*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

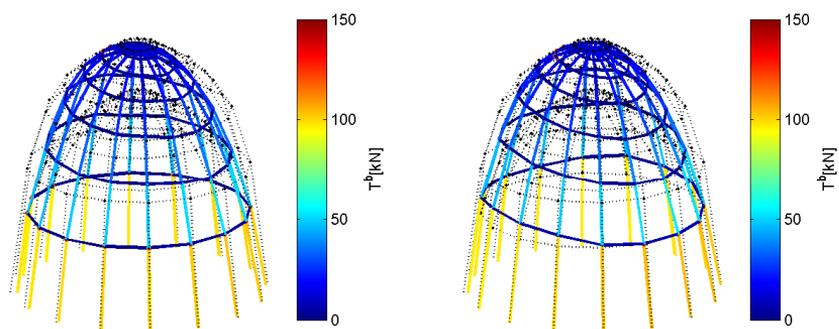


Figura 4.14: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 4*

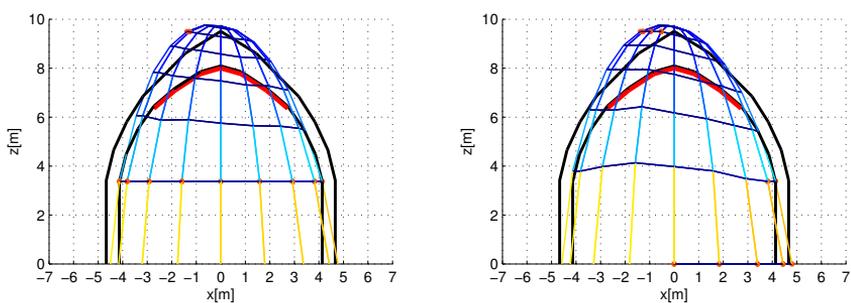


Figura 4.15: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 4*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

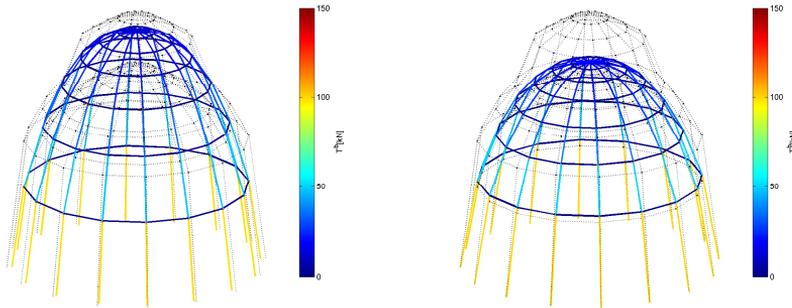


Figura 4.16: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 5*

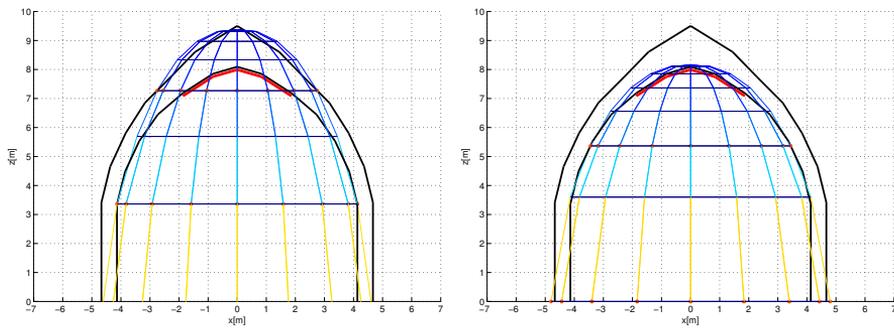


Figura 4.17: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 5*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

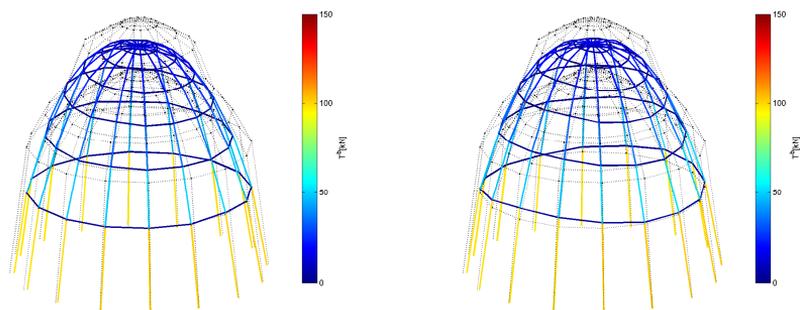


Figura 4.18: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 6*

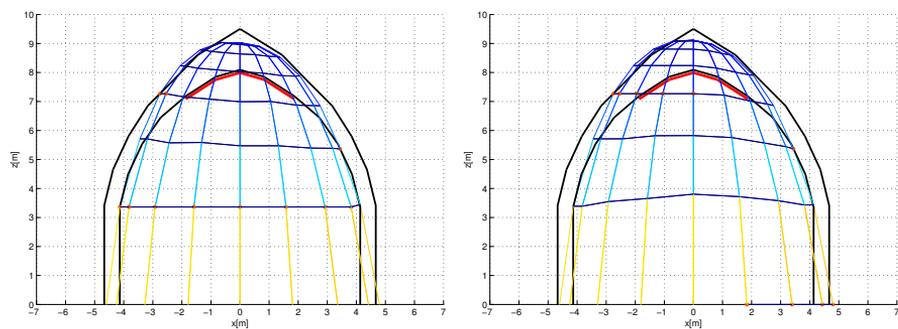


Figura 4.19: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 6*

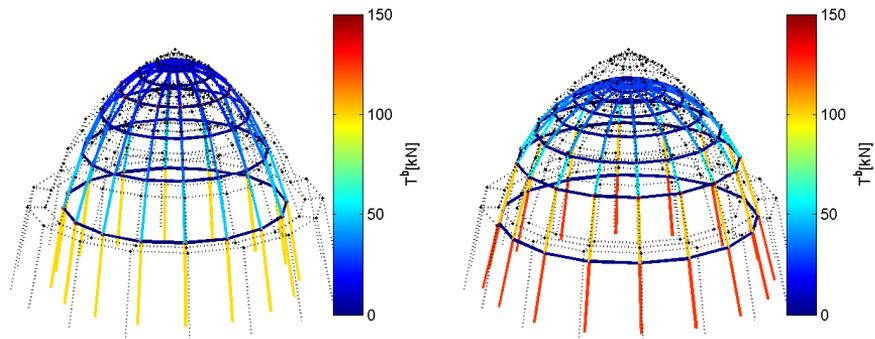


Figura 4.20: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 7*

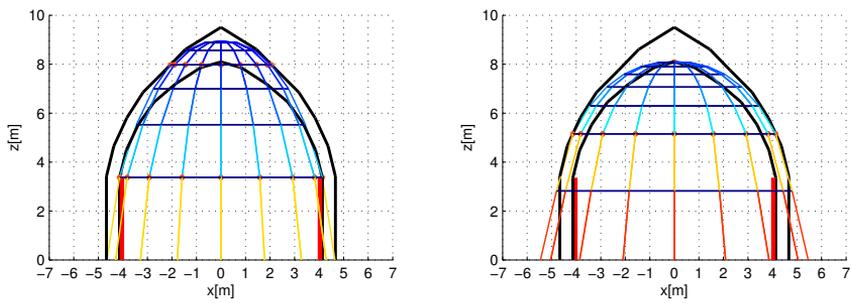


Figura 4.21: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 7*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

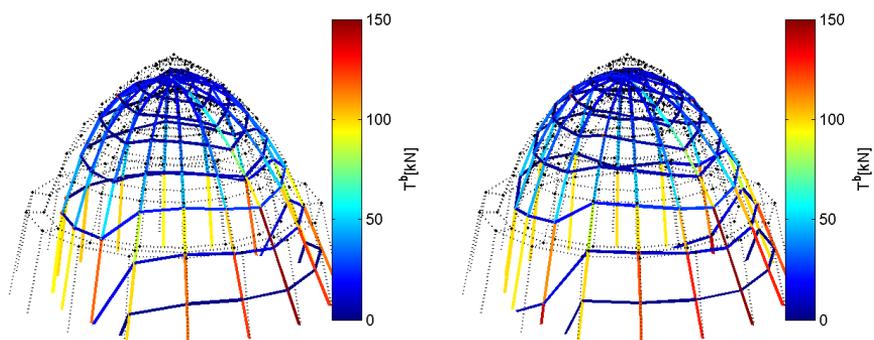


Figura 4.22: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 8*

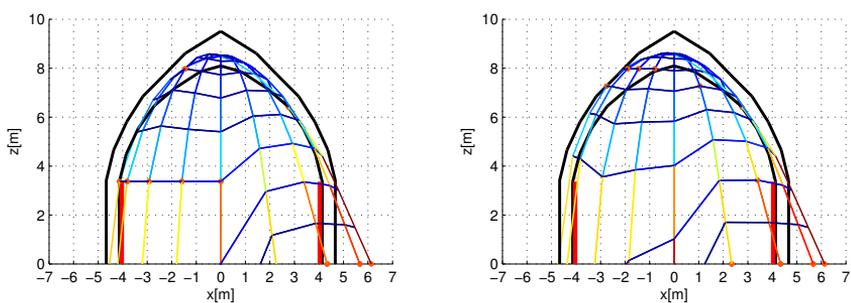


Figura 4.23: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 8*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

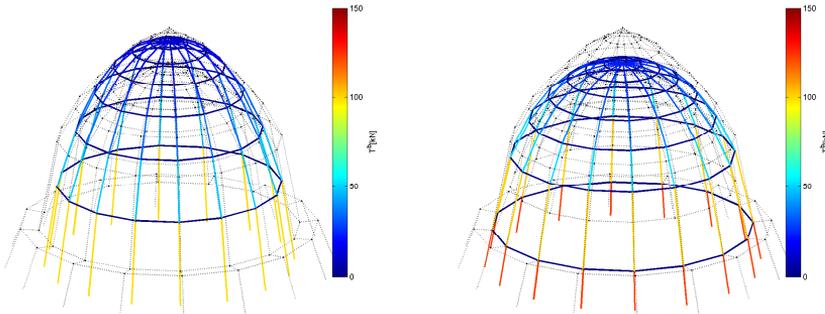


Figura 4.24: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 9*

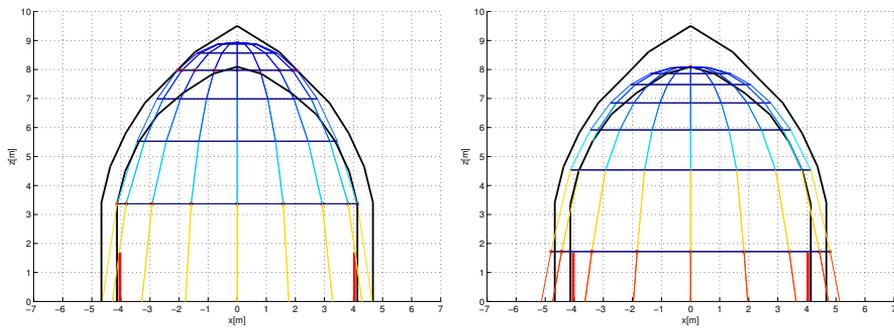


Figura 4.25: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 9*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

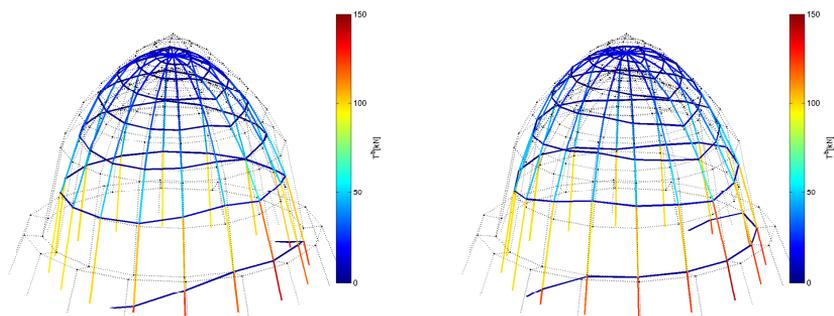


Figura 4.26: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 10*

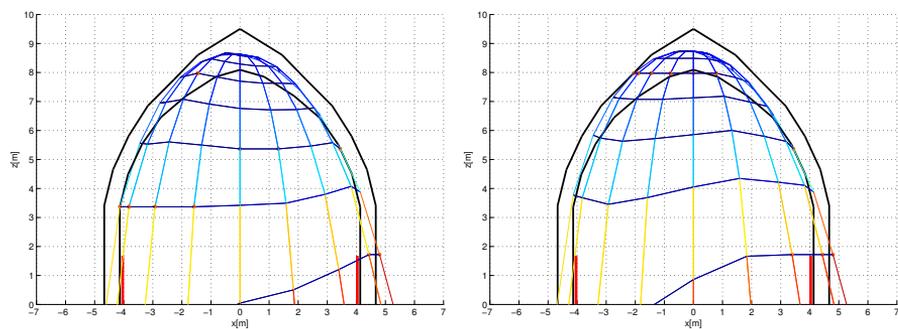


Figura 4.27: Sezioni trasversali delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Monteverginella 10*

### 4.3 Volta a crociera di Palazzo Camponeschi

Nel cuore della città de L'Aquila, importante capoluogo della fascia appenninica dell'Italia centro-meridionale, tra i tanti affascinanti edifici del centro storico si distingue un palazzo nobiliare appartenuto alla famiglia Camponeschi. Questo, costruito alla fine del XVI secolo, e successivamente interessato da numerosi restauri, ha rappresentato per lungo tempo il centro nevralgico della vita cittadina, ospitando anche la sede del rettorato dell'Università.

A seguito dei gravi danni subiti durante la sequenza sismica dell'aprile del 2009, viene sottoposto ad importanti lavori di ricostruzione al fine di ripristinarne le funzioni originali. Tornato nuovamente ad essere sede degli uffici rettorali, Palazzo Camponeschi offre ai visitatori una vasta gamma di opere murarie di notevole pregio artistico. Di particolare interesse strutturale è la volta a crociera a pianta rettangolare di  $5.4\text{ m}$  per  $4.95\text{ m}$ , ottenuta incrociando due volte a botte semicircolari aventi un'altezza pari a  $2.5\text{ m}$  e uno spessore di  $0.3\text{ m}$ , cfr. figura 4.28.

La rete di spinta ipotizzata per questa volta a crociera è composta da 121 nodi e 200 rami, ed è tale da costituire una griglia caratterizzata da una direzione preferenziale parallela agli assi delle volte a botte. Su tutti i rami della rete vengono imposti dei valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1\text{ kN}$  e dei valori massimi pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ .

I carichi verticali  $f_z$ , applicati ai nodi in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio della muratura pari a  $25\text{ kN/m}^3$ , mentre le azioni orizzontali  $f_x$  e  $f_y$ , sempre modellate per mezzo di carichi statici orizzontali proporzionali alle forze verticali  $f_z$ , sono applicate nella direzione di entrambe le ascisse  $x$  e  $y$ .

L'analisi della struttura viene eseguita considerando dei limiti  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  per le altezze nodali pari alle quote di intradosso e di estradosso della copertura, misurate in direzione verticale.

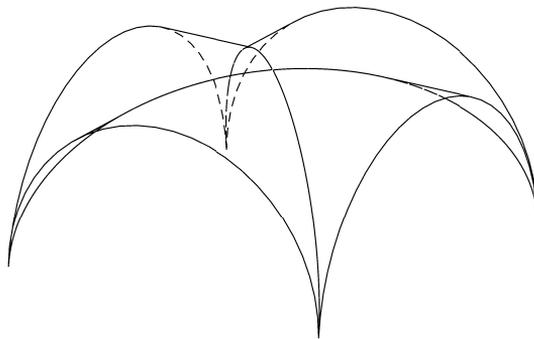


Figura 4.28: Modello geometrico della volta a crociera di Palazzo Camponeschi a L'Aquila

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Camponeschi 1* soggetta all'azione dei soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.29. In particolare nella soluzione di minima spinta si osservano valori mediamente bassi, uniformemente distribuiti in tutti i rami, indipendentemente dalla direzione di questi. Invece la soluzione di massima spinta, a fronte di sforzi mediamente più elevati, mostra un ulteriore incremento verso la parte bassa della volta, in corrispondenza dei sostegni. I punti di contatto tra i nodi della rete e le curve che ne delimitano il dominio fisico di variazione spaziale sono evidenziati da cerchi in nero.

Si ipotizza una configurazione alternativa della rete di spinta, imponendo differenti valori minimi della spinta di riferimento nei rami. In particolare questi vengono fissati pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.5 kN$  nei rami ogivali, pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.2 kN$  in quelli perpendicolari agli assi delle volte a botte, mentre un valore di  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1 kN$  viene imposto nei rami paralleli a tali assi. I valori massimi della spinta di riferimento, invece, rimangono invariati su tutta la rete.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della nuova rete *Camponeschi 2* soggetta all'azione dei soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.30. Queste evidenziano la tendenza della struttura a concentrare le spinte lungo le fasce diagonali di giunzione delle quattro unghie di volta a botte. Tale effetto appare particolarmente accentuato nella soluzione di massima spinta, caratterizzata da sforzi mediamente più elevati. In ogni caso, da entrambe le soluzioni appare evidente una netta concentrazione di questi in corrispondenza dei sostegni; un tale comportamento risulta essere molto aderente alla risposta strutturale reale di una volta a crociera.

Si sottopone questa configurazione alternativa della rete di spinta anche ad azioni orizzontali  $f_x$  e  $f_y$ , applicate nelle direzioni delle ascisse  $x$  e  $y$ . Aumentando progressivamente il loro valore in relazione ai carichi verticali  $f_z$ , si ottengono le corrispondenti soluzioni limite. In figura 4.31 sono riportate le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Camponeschi 3* soggetta alla combinazione dei carichi  $f_x = 0.1 f_z$  e  $f_y = 0.05 f_z$ .

In figura 4.32 si osservano invece le configurazioni limite per la rete *Camponeschi 4* soggetta alla combinazione dei carichi  $f_x = 0.2 f_z$  e  $f_y = 0.1 f_z$ , mentre la figura 4.33 illustra i risultati relativi alla rete *Camponeschi 5* sottoposta ai carichi orizzontali  $f_x = 0.3 f_z$  e  $f_y = 0.15 f_z$ .

Se si sottopone la struttura ad una combinazione dei carichi pari a  $f_x = 0.4 f_z$  e  $f_y = 0.2 f_z$ , si ottengono le soluzioni di minima e di massima spinta della rete *Camponeschi 6* riportate in figura 4.34, alle quali corrisponde un valore del rapporto di sicurezza pari a  $\zeta_{\min}/\zeta_{\max} = 0.716$ , indicativo di un discreto grado

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

di similitudine tra le due.

Tutti i risultati ottenuti mettono in evidenza, ancora una volta, il ruolo giocato dalle fasce diagonali come elementi di trasmissione preferenziale delle spinte interne. In aggiunta a tale considerazione, è interessante notare come all'aumentare dei carichi orizzontali  $f_x$  e  $f_y$  si verifichi una crescente concentrazione degli sforzi in corrispondenza dei sostegni della volta a crociera.

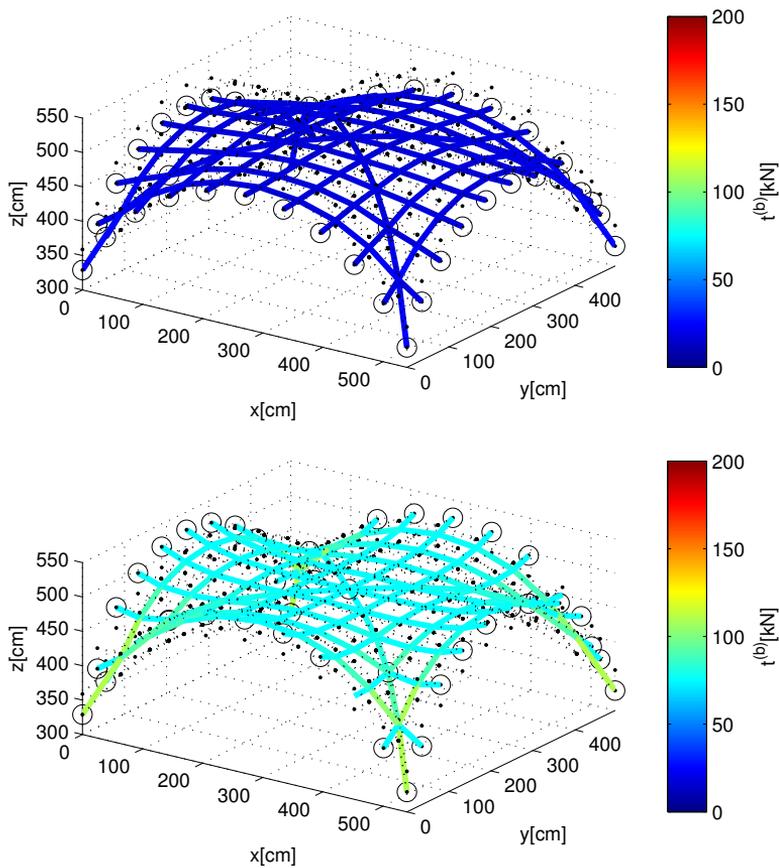


Figura 4.29: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 1*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

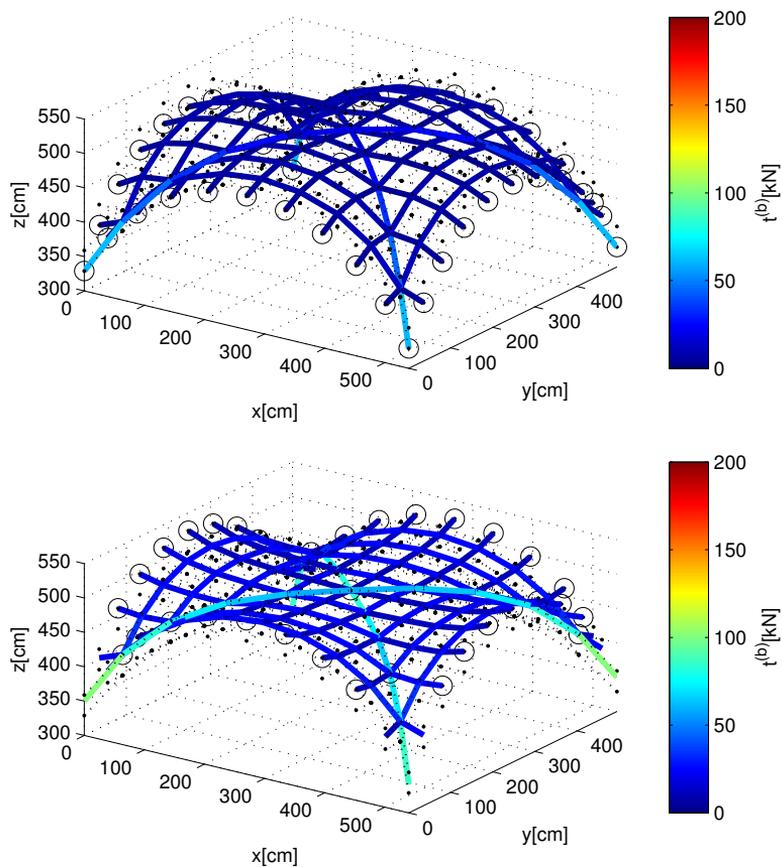


Figura 4.30: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 2*

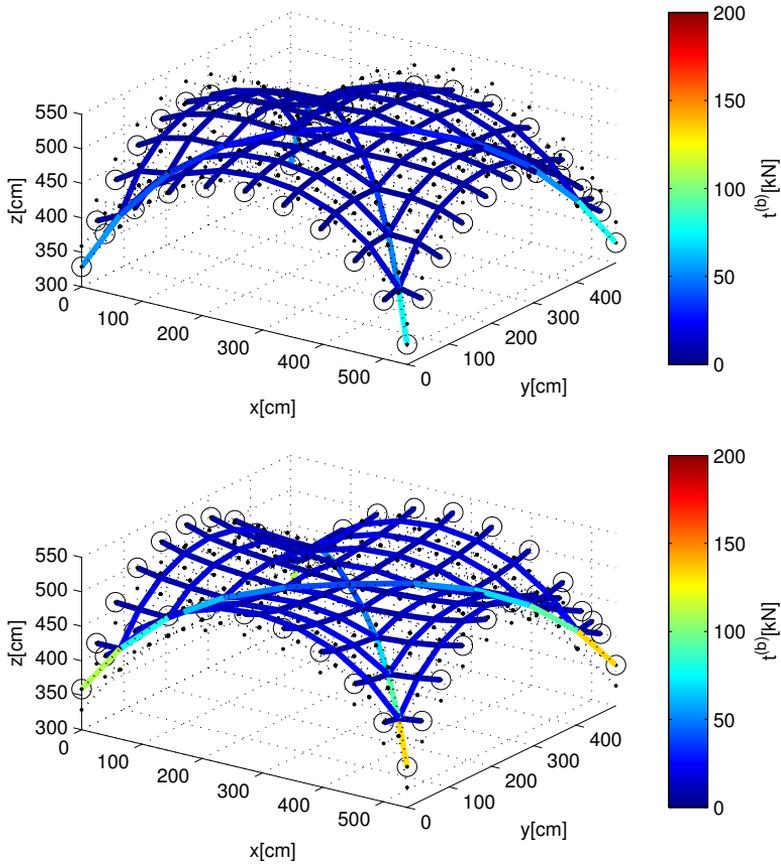


Figura 4.31: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 3*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

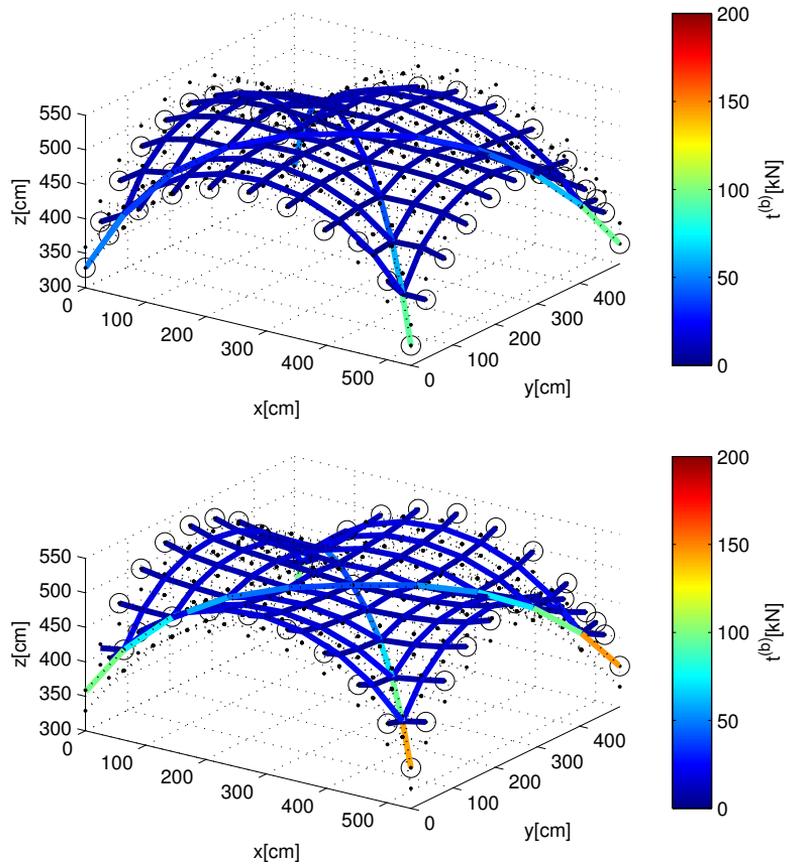


Figura 4.32: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 4*

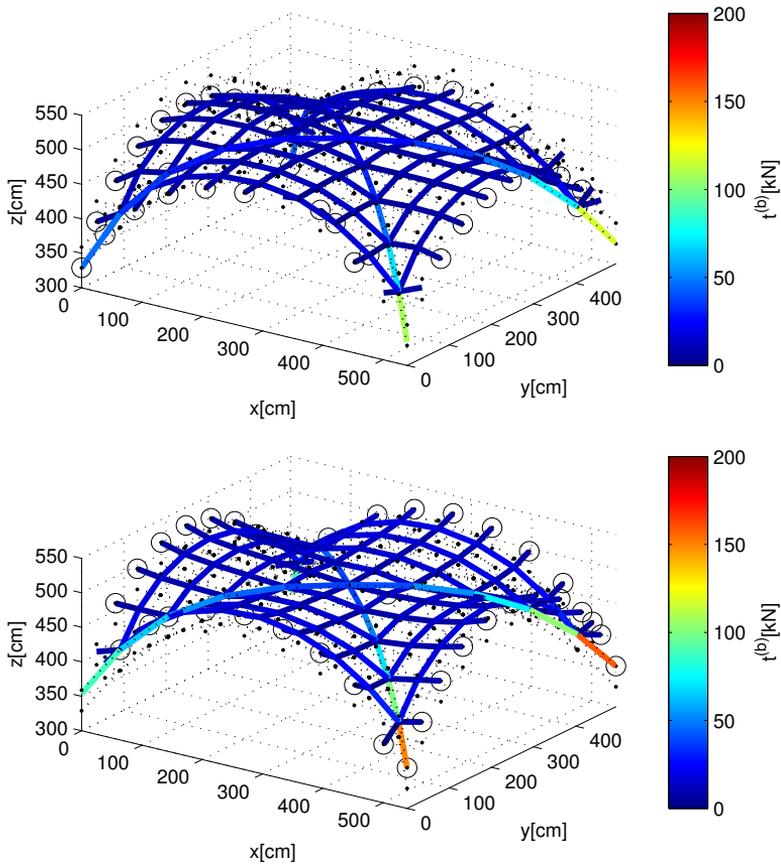


Figura 4.33: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 5*

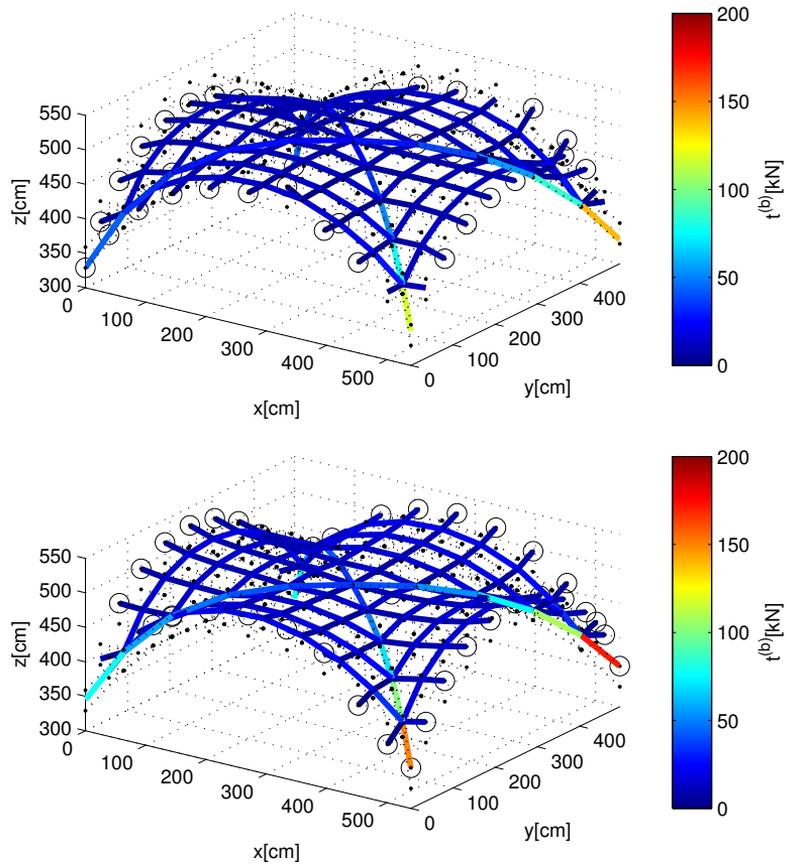


Figura 4.34: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Camponeschi 6*

## 4.4 Cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta

Il complesso monumentale di Piazza dei Miracoli a Pisa, famosa città dell'Italia centrale, costituisce uno degli esempi più significativi di urbanistica medievale in senso assoluto. A fianco della celeberrima torre pendente si trova la cattedrale dedicata a Santa Maria Assunta, che rappresenta uno degli edifici principali nel panorama del romanico italiano. Iniziata intorno alla fine del XI secolo, sotto la guida di Buscheto, in un momento di grande espansione dell'influenza pisana nel Mediterraneo, la chiesa era a buon punto già agli inizi del XII secolo, quando viene benedetta da papa Gelasio II. Vengono operati successivi lavori di ampliamento, continuati fino alla fine del XIV secolo quando si costruisce la loggetta attorno alla cupola. L'aspetto odierno, però, è il frutto di numerosi restauri ed integrazioni a seguito di un rovinoso incendio avvenuto alla fine del XVI secolo.



Figura 4.35: Vista della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa

Di grande importanza artistica e architettonica è l'insolita cupola a pianta ellittica, di chiara ispirazione moresca, che copre un vasto ambiente con sviluppo

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

planimetrico rettangolare, cfr. figura 4.35.

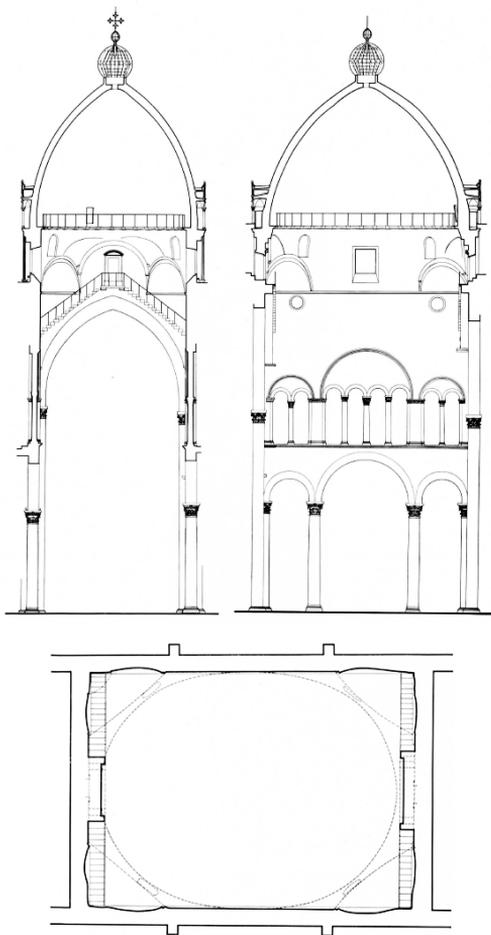


Figura 4.36: Sezioni della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa secondo i due assi principali e relativo sviluppo planimetrico [Sanpaolesi, P., 1959 [97]]

tutta la rete.

I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assu-

Impostata su di un imponente tamburo, e sormontata in sommità da un involucro sferico non strutturale in piombo, questa particolare copertura di altezza pari a  $12.5\text{ m}$  possiede un asse maggiore ed un asse minore rispettivamente di  $17.5\text{ m}$  e  $15.2\text{ m}$ . Lo spessore, approssimativamente di  $0.85\text{ m}$ , non varia in modo significativo lungo il suo sviluppo.

Grazie al contributo di [Sanpaolesi, P., 1959 [97]], è possibile ottenere preziose informazioni di carattere architettonico. In figura 4.36 sono, infatti, illustrate le sezioni della cupola e delle strutture di sostegno secondo i due assi principali dell'ellisse, nei piani  $y-z$  e  $x-z$ , nonché il suo sviluppo in pianta. La figura 4.37 presenta una sua ricostruzione della forma della forma originaria.

La rete di spinta ipotizzata per questa cupola ellittica è ottenuta mediante l'interconnessione di 10 paralleli e 16 meridiani. Valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0$  sono imposti ai rami che compongono i paralleli, mentre sui rami meridiani questi vengono fissati pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 1\text{ kN}$ . I valori massimi di spinta di riferimento, invece, sono considerati pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$  in

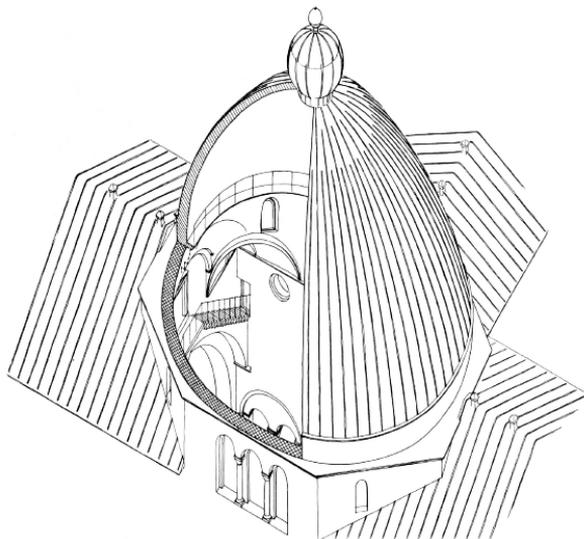


Figura 4.37: Ricostruzione della forma originaria della cupola della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa [Sanpaolesi, P., 1959 [97]]

mendo un peso specifico medio di  $25 \text{ kN/m}^3$ . I limiti imposti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  sono pari alle quote di intradosso e di estradosso della copertura, misurate in direzione verticale.

In figura 4.38, si riportano le viste assonometriche e dall'alto relative alla soluzione di minima spinta orizzontale della rete *Pisa* soggetta soltanto all'azione dei carichi verticali  $f_z$ . A queste si aggiungono le sezioni della cupola lungo l'asse minore, nel piano  $y-z$ , e lungo l'asse maggiore, nel piano  $x-z$ , cfr. figura 4.39.

Le viste assonometriche e dall'alto, relative alla soluzione di massima spinta orizzontale della rete, invece, sono illustrate in figura 4.40, corredate dalle sezioni lungo gli stessi piani riportate in figura 4.41. I punti di contatto tra i nodi della rete e le curve che limitano il dominio della copertura sono evidenziati mediante dei cerchi in nero.

Sotto l'azione dei soli carichi verticali  $f_z$ , le due soluzioni ottenute evidenziano un trend crescente delle spinte interne lungo lo sviluppo dei meridiani, a partire da valori molto bassi in prossimità dell'oculo centrale di sommità fino ad intensificarsi nettamente sulle sezioni di raccordo al tamburo. Sui rami che compongono i paralleli si registra, invece, lo stesso andamento, sebbene le spinte si mantengano su valori mediamente più deboli ovunque.

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

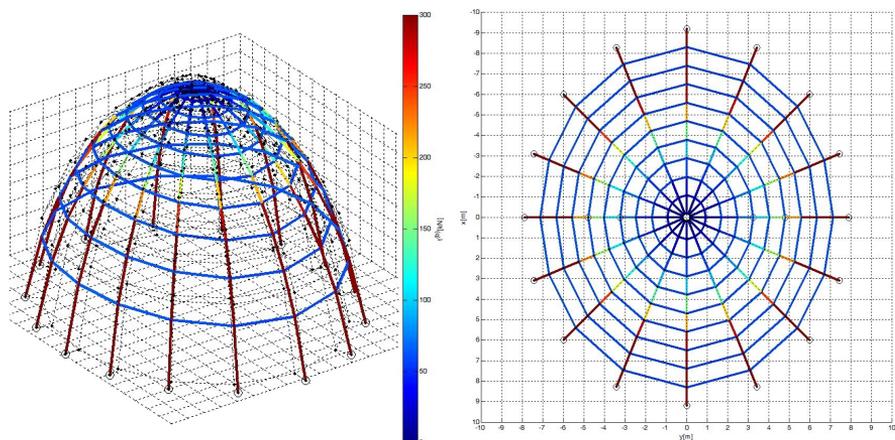


Figura 4.38: Vista tridimensionale e dall'alto della soluzione di minima spinta orizzontale per la rete *Pisa*

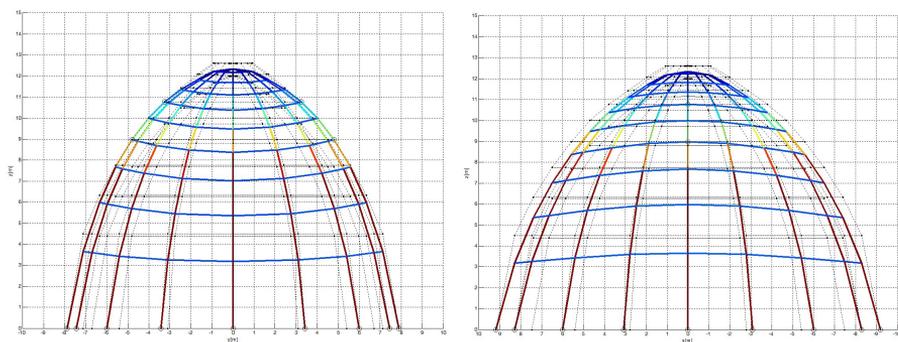


Figura 4.39: Sezioni trasversali lungo l'asse minore e lungo l'asse maggiore della soluzione di minima spinta orizzontale per la rete *Pisa*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

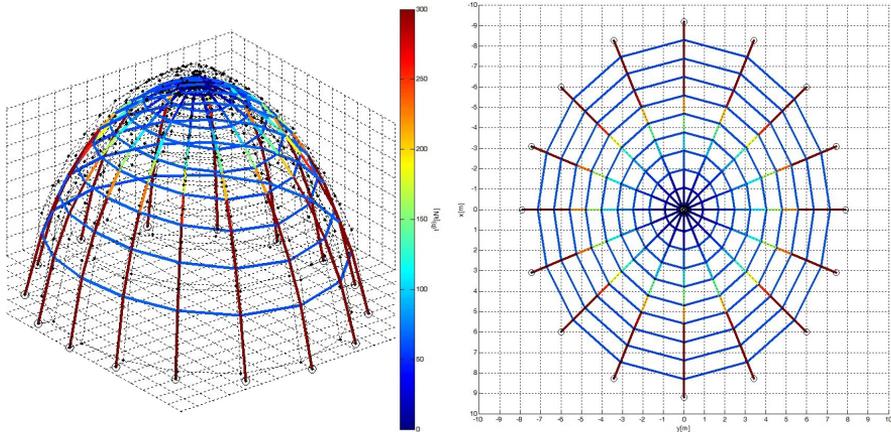


Figura 4.40: Vista tridimensionale e dall'alto della soluzione di massima spinta orizzontale per la rete *Pisa*

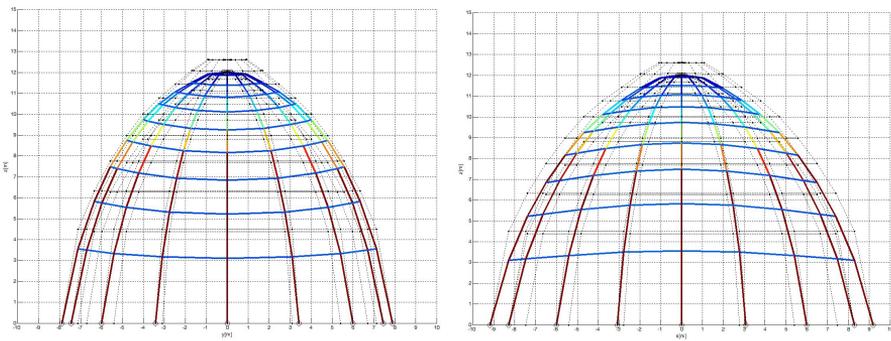


Figura 4.41: Sezioni trasversali lungo l'asse minore e lungo l'asse maggiore della soluzione di massima spinta orizzontale per la rete *Pisa*

## 4.5 Scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles

L'Abbazia di Saint-Gilles era situata presso il piccolo borgo di Saint-Gilles, nella regione meridionale francese dell'Occitania. Oggetto di numerosi restauri, questo meraviglioso esempio di stile romanico provenzale del VII secolo, parzialmente distrutto dalle rivolte protestanti della fine del XVI secolo, presentava al suo interno diversi capolavori di architettura medievale.

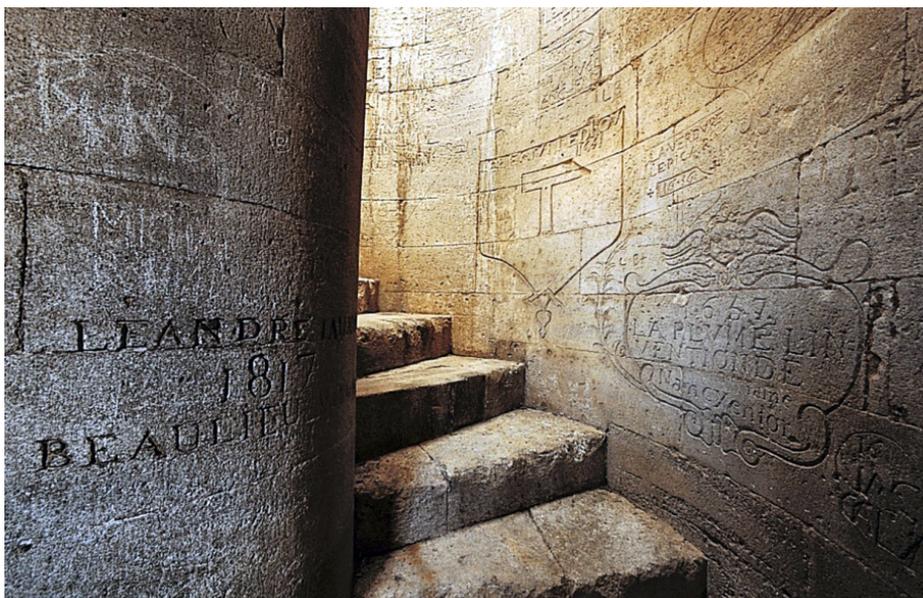


Figura 4.42: Particolare della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles

Tra questi capolavori è possibile annoverare la celebre Vite di Saint-Gilles, una caratteristica scala elicoidale in pietra conca composta da 50 gradini monolitici, costruita dal mastro galiziano Mateo de Cluny, cfr. figura 4.42. Questa struttura era il frutto di un sapiente utilizzo dell'arte stereotomica, e consentiva ai monaci l'accesso al campanile della chiesa salendo per circa tre piani. I primi 10 gradini potevano contare sul solido supporto di una muratura massiccia, mentre i rimanenti erano sostenuti da una volta a botte elicoidale semicircolare avente un'altezza complessiva di 13.5 m.

Di questa particolare struttura resta ben poco, ma grazie al mirabile lavoro di catalogazione svolto da [Viollet-le-Duc, E.E., 1886 [106]] si riescono a ricavare

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

importanti informazioni relative ai suoi aspetti geometrici. In particolare, in figura 4.44 viene illustrata la sezione longitudinale della scala lungo il piano  $x - z$ , nonché il suo sviluppo circolare in pianta.

La volta elicoidale era caratterizzata da uno spessore di circa  $0.3\text{ m}$ , e veniva sostenuta da un pilastro cilindrico centrale di raggio pari a  $0.3\text{ m}$ . Il muro perimetrale di sostegno, sempre di forma cilindrica, era posto ad una distanza di  $2.15\text{ m}$  dal centro della scala.

La rete di spinta ipotizzata per questa peculiare struttura è costituita da 11 rami elicoidali che seguono interamente il suo sviluppo longitudinale, e da 40 rami ad essi trasversali. La griglia così ottenuta è tale da aderire perfettamente alla forma originaria del manufatto murario. A questa delicata fase preliminare di costruzione del reticolo delle spinte è demandata la funzione di stabilire una corrispondenza diretta, quanto più efficace, tra il numero di gradini reali e gli allineamenti trasversali ideali. Di conseguenza questi ultimi devono essere interpretati come vere e proprie spinte radiali agenti al di sotto di ogni singolo gradino della scala.

Su tutti rami della rete vengono imposti dei valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1\text{ kN}$  e dei valori massimi pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ . I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio pari a  $25\text{ kN/m}^3$ .

La rete non presenta nodi di bordo poiché la scala è sostenuta, lungo tutto il suo sviluppo longitudinale, all'esterno dal muro perimetrale e all'interno dal pilastro centrale, cfr. figura 4.44. I limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  sono imposti pari alle quote di intradosso e di estradosso della copertura elicoidale, misurate in direzione verticale.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Saint-Gilles*

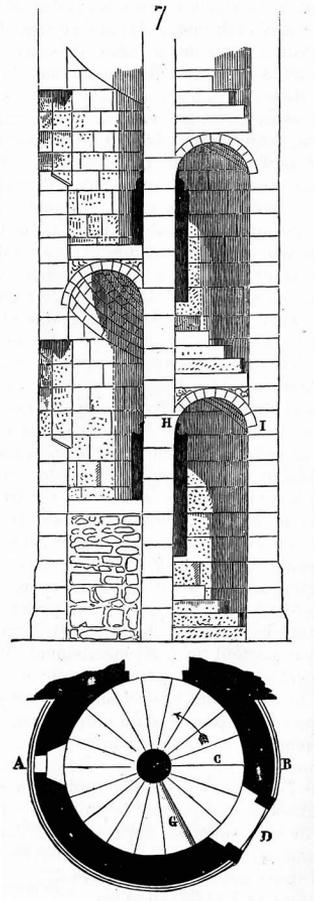


Figura 4.43: Sezione longitudinale e pianta della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles [Viollet-le-Duc, E.E., 1886[106]]

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

soggetta ai soli carichi verticali  $f_z$  sono illustrate in figura 4.45. In particolare la soluzione di minima spinta evidenzia, per i rami radiali, sforzi più elevati in corrispondenza dei supporti esterni, che si riducono progressivamente in direzione del pilastro centrale. Le spinte lungo i rami elicoidali, invece, risultano del tutto trascurabili lungo l'intero sviluppo longitudinale della struttura.

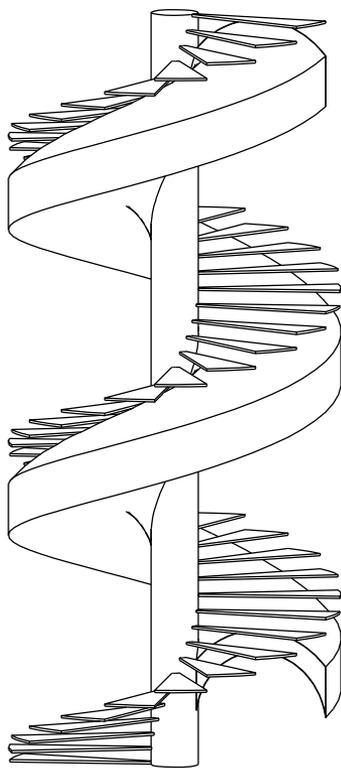


Figura 4.44: Modello tridimensionale della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles

La soluzione di massima spinta mostra come i rami elicoidali più prossimi al muro perimetrale siano quelli maggiormente sollecitati, mentre un trend inverso si riscontra nei rami radiali, dove sforzi più elevati si evidenziano in prossimità del muro perimetrale. I punti di contatto tra i nodi della rete e le curve di intradosso e di estradosso sono evidenziati tramite punti in rosso.

In virtù della geometria molto chiara e lineare di questa scala elicoidale, è stato possibile confrontare questi risultati con quelli ottenuti mediante l'applicazione del metodo proposto da [Gesualdo, A. et al., 2017 [55]]. In accordo con tale formulazione, la forma  $f$  della membrana con la quale si intende modellare lo sviluppo tridimensionale della struttura in esame viene assegnata arbitrariamente, al fine di risolvere la funzione di tensione di Airy.

Tale forma, generalmente incognita, può essere scelta tra le tante possibili configurazioni geometriche, a patto che risulti interamente contenuta nel volume occupato dalla volta elicoidale, assumendo il terzo medio del suo spessore come dominio geometrico ammissibile della membrana. Tale ipotesi non è rappresentativa delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale, che sono, invece, due soluzioni ben distinte ottenute imponendo come altezze limite di tale dominio proprio le altezze corrispondenti alle curve di intradosso e di estradosso della volta.

Per un corretto confronto tra i due metodi in esame, si assumono le due forme  $f_{\min}$  e  $f_{\max}$  per caratterizzare la geometria della membrana, al fine di

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

interpolare nel migliore dei modi le due soluzioni funicolari ottenute dall'analisi tramite reti di spinta. Queste due funzioni di forma sono espresse in coordinate cilindriche, e la dipendenza dalla distanza radiale  $r$ , per l'asse della volta, viene assunta quadratica, fornendo la seguente formulazione:

$$f(r, \theta) = \frac{\delta_1(R_p + R_s - r)^2 + (R_p - r)(r - R_p - 2R_s)(\delta_2 + R_s)}{R_s^2} + H \frac{\theta}{2\pi} \quad (4.1)$$

dove  $R_p = 0.42 m$  e  $R_s = 0.8 m$  sono i parametri geometrici che rappresentano la distanza tra l'asse dell'elica e il primo nodo della rete, e la distanza tra l'asse dell'elica e il nodo centrale. I due termini  $\delta_1$  e  $\delta_2$  vengono utilizzati per definire la forma della membrana corrispondente alle due configurazioni limite. In particolare vengono imposti i valori  $\delta_{1 \min} = 0.48 m$  e  $\delta_{2 \min} = 0.41 m$  per la soluzione di minima spinta, mentre i valori  $\delta_{1 \max} = 0.8 m$  e  $\delta_{2 \max} = 0.13 m$  sono utilizzati per definire la soluzione di massima spinta.  $H = 4 m$  rappresenta infine il passo dell'elica.

Le componenti di sforzo previste sono:

$$\sigma_r = \frac{pR_s^2(r + R_p + R_s)}{4r(\delta_1 - \delta_2 - R_s)} \quad \sigma_\theta = \frac{pR_s^2}{4(\delta_1 - \delta_2 - R_s)} \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad (4.2)$$

dove  $p = 23 kN/m^2$  è il valore medio del carico applicato per unità di area. I valori forniti dalle equazioni (4.2) sono ottenuti, per le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della membrana, collegando i corrispondenti valori di  $\delta_1$  e  $\delta_2$  diagrammati in figura 4.46. Qui le sezioni trasversali delle due membrane sono rappresentate assieme alle sezioni corrispondenti alla rete di spinta ottenuta. Le due linee nere sono invece indicative della geometria delle superfici di intradosso e di estradosso della volta.

È importante ricordare come l'analisi tramite reti di spinta sia in grado di fornire direttamente i valori della spinta  $T^b$ , così come riportato in figura 4.45, mentre la soluzione relativa al metodo della membrana non reagente a trazione fornisce l'espressione attraverso cui ricavare le componenti dello sforzo proiettato. Di conseguenza per un adeguato confronto tra i due approcci, le spinte orizzontali  $T_h^b$  di ciascun ramo dovrebbero essere divise per l'area nominale della sezione trasversale associata ad ognuno di essi.

Il calcolo di  $T_h^b$  è banale, dal momento che questi valori sono direttamente contenuti nel vettore  $\mathbf{t}$  calcolato attraverso la procedura di risoluzione, mentre la sezione trasversale associata a ciascun ramo dipende dalla sua posizione spaziale e dal suo orientamento. In particolare per i rami radiali disposti ad intervalli angolari di  $d\alpha = \pi/10$ , si assume una sezione rettangolare di larghezza pari a

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

$W_r = 2r \sin(d\alpha/2)$ , con  $r$  che rappresenta la distanza tra il centro del ramo e l'asse dell'elica.

Gli sforzi nei rami radiali sono calcolati come  $\sigma_r = T_h^b / (W_r H_r)$ , mentre quelli nei rami longitudinali come  $\sigma_\theta = T_h^b / (W_\theta H_\theta)$ , dove  $H_\theta = H_r = 0.27 m$  viene assunto pari allo spessore della volta.

La figura 4.46 mostra una corrispondenza quasi perfetta tra il modello delle reti di spinta (TNA) e quello della membrana non reagente a trazione (NTM), producendo un risultato positivamente interpretabile ai fini della validazione del modello proposto sulla base di ulteriori esperienze già presenti in letteratura.

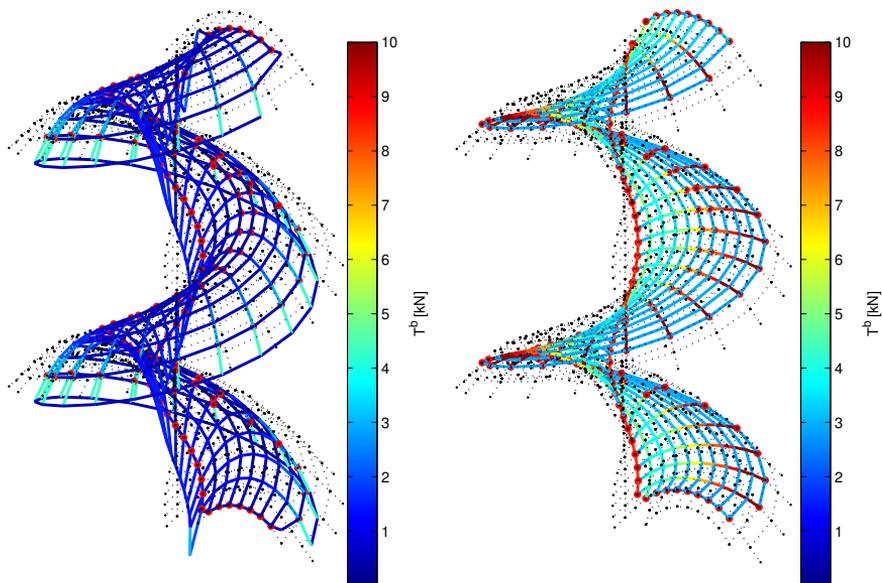


Figura 4.45: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Saint-Gilles*

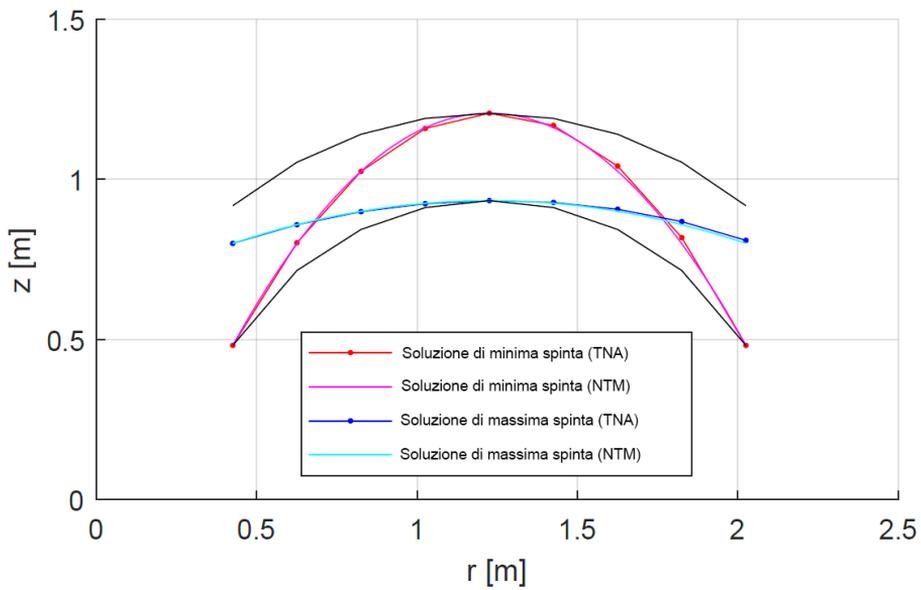


Figura 4.46: Confronto tra il metodo delle reti di spinta e quello della membrana non reagente a trazione per una sezione particolare della scala elicoidale dell'Abbazia di Saint-Gilles

## 4.6 Scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo

La Certosa di San Lorenzo è situata all'interno della vasta circoscrizione del Vallo di Diano, più precisamente nel comune di Padula. Con oltre cinque ettari di estensione territoriale, questo monumentale complesso monastico in stile barocco rappresenta il più grande edificio religioso dell'Italia meridionale, nonché uno dei più interessanti siti turistici per magnificenza architettonica e copiosità dei tesori artistici.



Figura 4.47: Particolare della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula

Costruita all'inizio del XIV secolo per volontà di Tommaso Sanseverino, sotto il Regno di Napoli, viene ampliata e ristrutturata nei secoli attraverso molte modifiche sostanziali al corpo di fabbrica originario. Varcata la soglia della certosa ci si trova di fronte ad una scenografica scala elicoidale che conduce all'antisala della biblioteca. Questa è una scala in pietra, di autore ignoto, risalente al XV secolo ed è composta da 38 gradini monolitici che si appoggiano a ridosso di un muro perimetrale cilindrico esterno [Sacco, A., 1916 [94]].

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

Invece all'estremità interna questi si collegano tra loro a formare un cordolo centrale di forma elicoidale, culminante in una balaustra, anch'essa in pietra, cfr. figura 4.47. L'elica possiede un raggio interno pari a  $0.3\text{ m}$  e un raggio esterno pari a  $1.8\text{ m}$ , nonché uno sviluppo longitudinale complessivo di  $5.7\text{ m}$ , cfr. figura 4.48.

La rete di spinta ipotizzata per questa scala è composta da 5 rami elicoidali che ne percorrono interamente lo sviluppo longitudinale; uno di questi rappresenta proprio il cordolo centrale, che a sua volta costituisce l'apertura interna della rampa. In senso trasversale a questi, 3 serie di rami vanno a modellare i singoli gradini, mentre il pianerottolo in sommità contenente la balaustra in pietra è schematizzato per mezzo di 1 ramo che collega la parte superiore dell'elica alla parete perimetrale, cfr. figura 4.49.

Su tutti i rami della rete vengono imposti dei valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1\text{ kN}$  e dei valori massimi pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ . I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio di  $25\text{ kN/m}^3$ . La scala presenta un bordo libero lungo il cordolo elicoidale, dunque la rete di spinta ipotizzata possiede nodi e rami di bordo funicolari dei carichi esterni applicati, cfr. figura 4.49. I limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  vengono fissati pari alle quote di intradosso e di estradosso della copertura, misurate in direzione verticale.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Padula 1* soggetta soltanto ai carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.50. Entrambe le distribuzioni dei valori di spinta evidenziano chiaramente come l'elica centrale si faccia carico quasi interamente della statica globale della struttura, spingendo



Figura 4.48: Ulteriore particolare della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula

i gradini a ridosso del muro perimetrale e fornendo un'utile azione di bloccaggio.

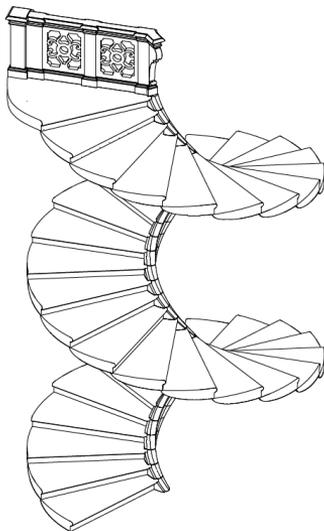


Figura 4.49: Modello tridimensionale della scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula

Questa forte compressione da parte dell'elica interna è equilibrata, nella parte bassa, dalla reazione vincolare del pavimento, mentre in alto agisce la reazione stabilizzante della balaustra in pietra. I punti di contatto tra i nodi della rete e le curve di intradosso e di estradosso della volta sono evidenziati tramite cerchi di colore nero.

Sotto ponendo la struttura anche ad azioni orizzontali  $f_x$ , applicate in direzione dell'ascissa  $x$ , si ottengono in figura 4.51 le corrispondenti soluzioni di minima e di massima spinta della rete *Padula 2*, soggetta alla combinazione dei carichi  $f_x = 0.5 f_z$ . Dalla figura 4.52, appare chiaro il ruolo giocato della balaustra come elemento equilibrante della spinta trasmessa lungo l'elica interna. Entrambe le soluzioni ottenute dall'analisi, infatti, vanno ad assumere una configurazione tale per cui il ramo terminale della rete corrispondente all'ultimo gradino in sommità ricada proprio all'interno del volume occupato dalla balaustra, giustificandone l'importanza.

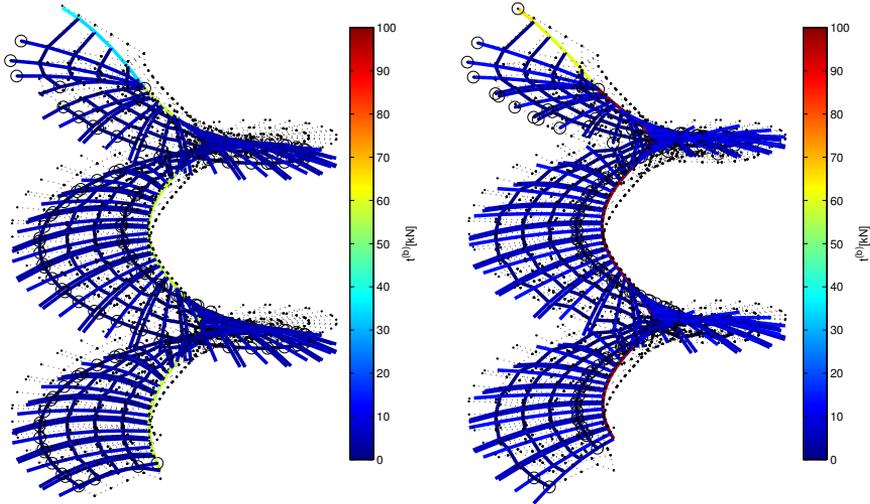


Figura 4.50: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Padula 1*

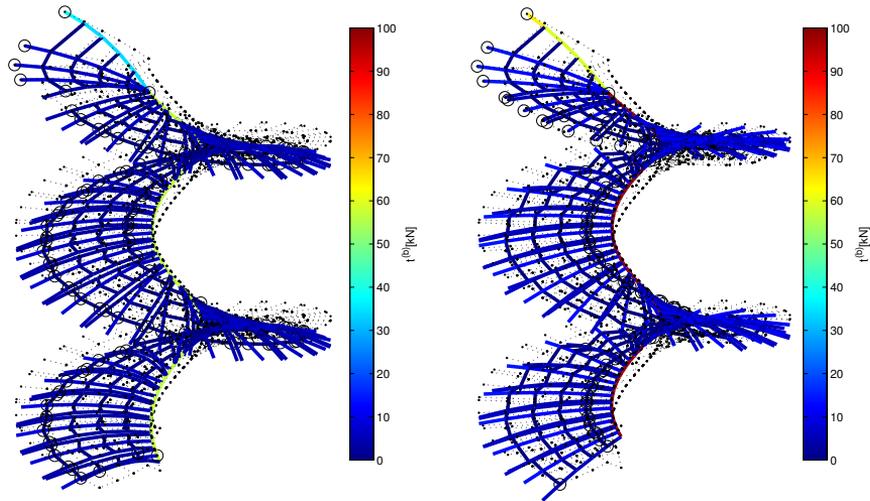


Figura 4.51: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Padula 2*

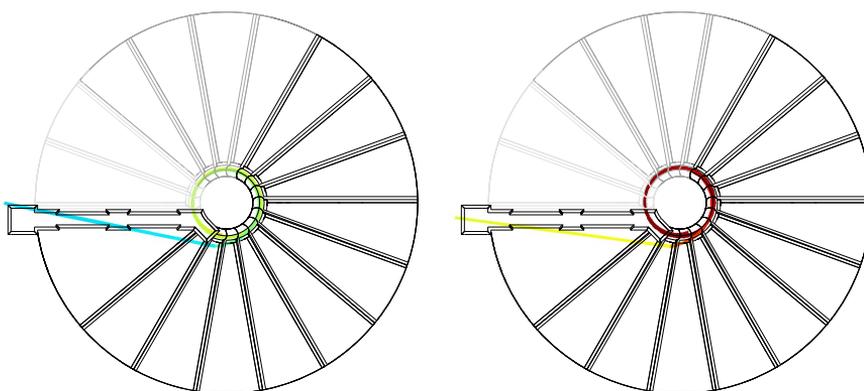


Figura 4.52: Vista dall'alto delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Padula 2*

## 4.7 Scala a tripla elica del Convento di San Domingos de Bonaval

Il Convento di San Domingos de Bonaval, fondato da San Domingos de Guzman agli inizi del XIII secolo, è situato nella regione spagnola della Galizia, sulle pendici del Monte Almaciga che si trova alle porte di Santiago de Compostela. Questo importante edificio ecclesiastico in stile gotico viene restaurato alla fine del XVII secolo dall'architetto Domingo de Andrade, su commissione dell'arcivescovo Antonio de Monroy, in accordo con i canoni architettonici del barocco galiziano.



Figura 4.53: Vista dal basso della scala a tripla elica del Covento di San Domingos de Bonaval a Santiago de Compostela

All'interno del convento è possibile osservare e percorrere una magnifica scala in muratura a tripla elica, realizzata durante le fasi di restauro per mano dello stesso architetto, cfr. figura 4.53. Questa struttura asservisce alla funzione di collegamento tra il chiostro e l'edificio principale, ed è composta da tre eliche completamente indipendenti tra loro che conducono alle stanze situate sui vari

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

piani dell'edificio, cfr. figura 4.54. Le due eliche più corte, composte da 45 gradini, si sviluppano lungo un'altezza complessiva di  $8.5\text{ m}$ , mentre quella più alta è composta da 82 gradini e sale fino al terrazzo panoramico posto a  $15.6\text{ m}$  da terra, cfr. figura 4.55.

I gradini sono costituiti da un intero monolite granitico di spessore costante pari a  $0.2\text{ m}$ , e sono sostenuti esternamente da una parete cilindrica di raggio pari a  $2.7\text{ m}$ . Questi terminano riunendosi a formare un cordolo in pietra, che costituisce un'apertura circolare di raggio interno pari a  $1\text{ m}$ . Poiché le tre rampe elicoidali che compongono l'intera struttura si comportano in modo indipendente, queste possono essere modellate separatamente.



Figura 4.54: Particolare della scala a tripla elica del Covento di San Domingos de Bonaival a Santiago de Compostela

La rete di spinta ipotizzata per questa scala è composta da 5 eliche longitudinali che corrono lungo tutto lo sviluppo della rampa, delle quali una è rappresentativa del cordolo centrale che costituisce l'apertura interna. Ogni gradino viene modellato tramite 1 ramo trasversale, mentre i rami esterni schematizzano le reazioni vincolari della struttura e sono posizionati all'estremità esterna dei gradini.

Su tutti i rami della rete vengono imposti dei valori minimi della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1\text{ kN}$  e dei valori massimi pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ . I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio di  $25\text{ kN/m}^3$ . I limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  sono rappresentati dalle quote di intradosso e di estradosso della struttura, misurate in direzione verticale. Essendovi un bordo libero lungo tutto

il cordolo centrale, la rete di spinta possiede nodi e rami di bordo funicolari

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

dei carichi esterni applicati.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Bonaival* soggetta ai soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.56. Dai diagrammi appare chiara la statica globale della struttura, nella quale i gradini vengono spinti a ridosso del muro da una forza uniforme, in alcun modo influenzata dall'altezza della struttura. Gli sforzi sui rami radiali che costituiscono i gradini risultano di modesta entità, sia nella parte superiore che in quella inferiore dell'elica, sebbene sia possibile notare alcune differenze tra le due soluzioni.

Al contrario valori più elevati delle spinte si riscontrano all'interno del cordolo centrale, che si comporta chiaramente come un arco elicoidale funicolare delle forze ad esso trasmesse dai gradini. Qui le spinte si mantengono approssimativamente costanti, fatta eccezione per la sua parte superiore, dove si apprezza una chiara riduzione in entrambe le soluzioni. In questa porzione della scala, i rami longitudinali deviano dalla propria posizione iniziale, fino a toccare l'angolo esterno superiore. Il contatto tra i nodi della rete e le curve di intradosso e di estradosso è evidenziato mediante punti in rosso.

In figura 4.57 sono restituite due viste dall'alto della rampa elicoidale maggiore, assieme alla configurazione geometrica assunta dai corrispondenti rami longitudinali. Mentre l'elica centrale raggiunge progressivamente la balaustra posta in cima alla scala, una porzione sempre più ampia dei gradini viene separata da questo bordo della rete. Ciò sta ad indicare come il settore interno dei gradini posizionati più in alto non risulti soggetto alla forza radiale che li spinge a ridosso del muro perimetrale. Dunque a differenza del comportamento assunto

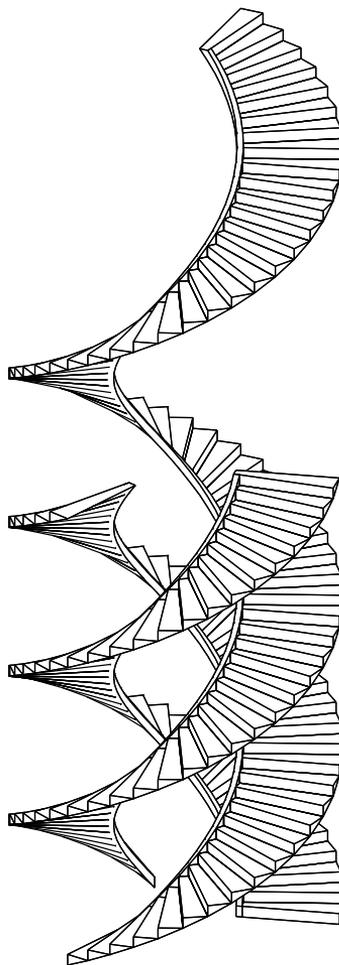


Figura 4.55: Modello tridimensionale della scala a tripla elica del Convento di San Domingos de Bonaival a Santiago de Compostela

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

dalla parte inferiore della scala, questi gradini non risultano compressi in modo uniforme.

Infine è interessante notare come tale soluzione sia in accordo con quella ipotizzata da [Angelillo, M., 2016 [6]]. Infatti la scala si comporta globalmente secondo un modello anulare, nel quale il cordolo elicoidale centrale, spingendo i gradini contro il muro esterno, fornisce una benefica azione di bloccaggio. Tale comportamento viene mantenuto per l'intero sviluppo della scala, eccezione fatta per l'estremità superiore delle rampe, dove nascono alcune tensioni di trazione a causa dell'effetto torcente sviluppato lungo i gradini posti più in alto, che si comportano, invece, secondo il modello ipotizzato da [Heyman, J., 1966 [57]].

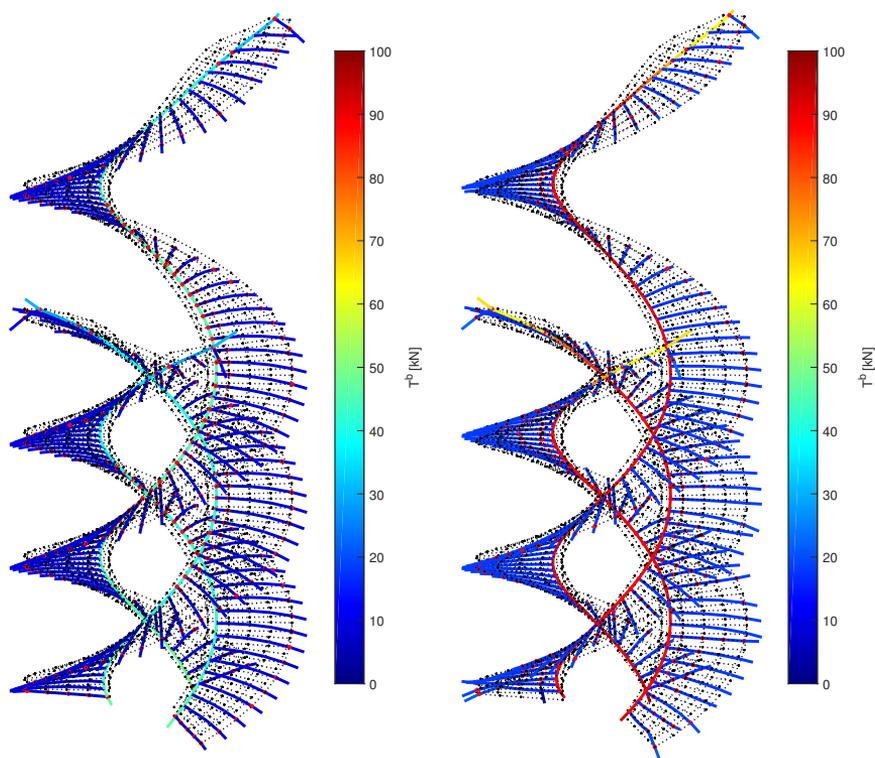


Figura 4.56: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Bonaval*

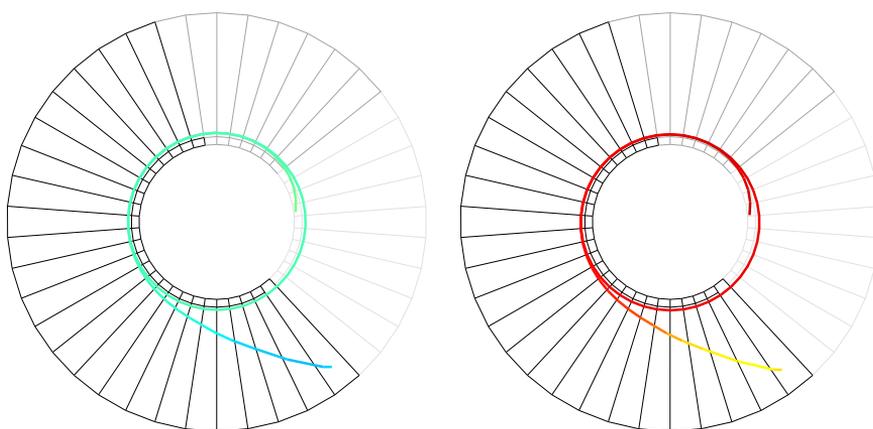


Figura 4.57: Vista dall'alto delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Bonaval*

## 4.8 Scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice

Palazzo Sanfelice viene progettato dall'architetto Ferdinando Sanfelice, e costruito intorno alla prima metà del XVIII secolo all'interno del quartiere popolare di Rione Sanità a Napoli. Tanto affascinante quanto misterioso, questo maestoso edificio in stile barocco ha rappresentato la dimora storica della famiglia Sanfelice.



Figura 4.58: Ingresso della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli

La struttura è composta da due corpi distinti, unificati dalla facciata comune lungo la quale si aprono due grandi portali gemelli che consentono l'accesso alle corti interne. Il primo corpo di fabbrica ruota attorno ad un ampio piazzale a pianta quadrata, da cui si diparte una scenografica scala aperta ad ali di gabbiano. Il secondo corpo di fabbrica si staglia, invece, al di sopra di un piccolo cortile a pianta ottagonale, dal quale si accede ad una monumentale scala a doppia elica che conduce fino all'ultimo piano del palazzo, cfr. figura 4.58. Le due eliche, che si avvolgono attorno agli assi di due distinti pilastri cilindrici, si ricongiungono successivamente a formare dei pianerottoli intermedi, cfr. figura 4.59.

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

In figura 4.60 è possibile notare come la scala risulti accessibile tramite una rampa che collega il cortile ottagonale  $A$  al primo pianerottolo intermedio  $B$ . Da qui due ulteriori rampe, approssimativamente elicoidali, si arrampicano sui lati opposti di una parete centrale  $W$ , raggiungendo un altro pianerottolo comune  $E$  dopo aver creato due pianerottoli intermedi distinti:  $C$  e  $D$  in senso orario,  $C'$  e  $D'$  in senso antiorario.

Queste due eliche, che rendono possibile il collegamento dei due pianerottoli  $B$  ed  $E$ , sono sostenute da una volta a botte a sviluppo elicoidale, caratterizzata da una forma ellittica schiacciata in pianta, che si chiude verso la parete centrale  $W$  al primo piano, cfr. figura 4.61. La volta in questione copre un piano interrato non direttamente accessibile dal cortile, ma che può essere intravisto guardando attraverso l'apertura ovale praticata nella parete centrale, nonché da alcuni fori di aerazione presenti lungo lo sviluppo della rampa  $AB$ .

La porzione posteriore del pianerottolo  $E$  è sostenuta dalla stessa volta, mentre il suo lato anteriore poggia direttamente sulla parete centrale. Altre due eliche divergono da  $E$  avvolgendosi attorno a due pilastri circolari  $P$  e  $P'$ , che a loro volta si appoggiano sulla parete centrale  $W$ . Queste rampe raggiungono i pianerottoli  $F$  e  $G$  in senso orario, e i pianerottoli  $F'$  e  $G'$  in senso antiorario. Ai pianerottoli  $G$  e  $G'$ , la scala termina con due piccoli parapetti e con gli ingressi agli appartamenti. Le rampe  $EFG$  ed  $EF'G'$  sono principalmente sostenute da due volte elicoidali che coprono a loro volta le rampe  $BC$  e  $BC'$ , mentre al di sotto dei pianerottoli  $G$  e  $G'$ , tali volte terminano con un arco di collegamento tra i pilastri e con il muro esterno della tromba delle scale.

Il lato anteriore delle rampe  $EF$  e  $EF'$  è sostenuto dalla grande volta a botte che copre la rampa di ingresso  $AB$ . Le rampe  $BCDEFG$  e  $BC'D'EF'G'$  sono composte da 30 gradini ciascuna e formano due spirali irregolari aventi un raggio esterno medio di  $2.5\text{ m}$  e un



Figura 4.59: Particolare della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

raggio interno di  $0.6\text{ m}$ , raggiungendo un'altezza complessiva di  $7.7\text{ m}$ .

La rete di spinta ipotizzata segue la geometria complessa e irregolare della struttura, in particolare la porzione al di sotto della scalinata  $AB$  è composta da una griglia di 7 rami trasversali e 8 rami longitudinali. I 3 rami superiori di questa porzione della rete proseguono fino a formare ulteriori 3 rami longitudinali delle eliche  $BCDE$  e  $BC'D'E$ . Qui la configurazione della rete si compone di 26 rami radiali per ogni elica, ossia 1 ramo per ogni gradino più 3 rami per ogni pianerottolo intermedio.

Le reti che modellano le due spirali  $EFG$  e  $EF'G'$  sono composte, invece, da 4 rami longitudinali e 14 rami radiali ciascuna, anche qui 1 per ogni gradino e 3 per i pianerottoli  $F, G, F'$  e  $G'$ . Gli ultimi rami radiali dei pianerottoli  $G$  e  $G'$  rappresentano i bordi liberi, a cui corrispondono gli archi terminali dell'estremità più alta delle volte elicoidali.

Infine la rete che modella l'ampia volta a botte sulla rampa d'ingresso  $AB$  è costituita da 4 rami trasversali e 9 longitudinali, ed è sostenuta su tre lati, cioè quelli corrispondenti alla parete centrale e ai due lati della scala  $AB$ , mentre il quarto, rivolto verso il cortile, rappresenta un bordo libero.

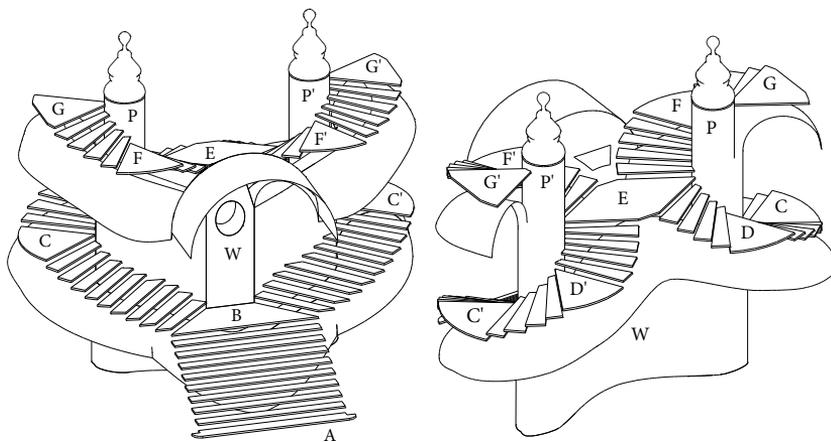


Figura 4.60: Modello tridimensionale della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli

Su ogni ramo della rete viene imposto un valore minimo della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1\text{ kN}$  e un valore massimo pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ . I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio di  $25\text{ kN/m}^3$ . I limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

vengono assunti pari alle quote di intradosso e di estradosso della muratura, misurate in direzione verticale.

Nelle figure 4.62 e 4.63 sono riportati i diagrammi relativi alle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Sanfelice* soggetta ai soli carichi verticali  $f_z$ . Queste si differenziano visibilmente per l'entità dei valori medi di sforzo; infatti in entrambi i casi, le spinte più intense attengono ai rami longitudinali esterni che costituiscono le rampe  $ABCDE$  e  $ABC'D'E$ . Una distribuzione simile si manifesta anche lungo i rami radiali, dove le spinte si intensificano in corrispondenza delle estremità esterne.

Nelle due spirali che supportano le rampe  $EFG$  e  $EF'G'$ , gli sforzi sono pressoché costanti lungo tutta la larghezza del gradino, mentre assumono valori maggiori in corrispondenza delle estremità esterne dei rami radiali.

Nell'ampia volta a botte posizionata sull'ingresso, le spinte trasversali si attestano su valori relativamente bassi mentre quelle longitudinali crescono visibilmente man mano che ci si avvicina ai due supporti laterali. I punti di contatto tra i nodi della rete e le curve di intradosso e di estradosso della copertura sono evidenziati tramite dei punti in rosso.

I rami che costituiscono i bordi liberi della struttura, dovendo essere funicolari delle forze verticali  $f_z$  applicate, nonché della spinta orizzontale trasmessa dai rami trasversali, assumono una particolare curvatura. Una configurazione simile, sebbene in proporzioni minori, è visibile per i rami di bordo dei pianerottoli terminali  $G$  e  $G'$ .

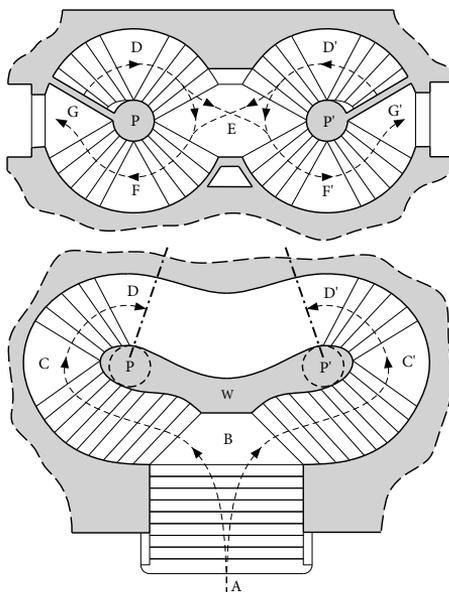


Figura 4.61: Pianta del primo e del secondo piano della scala a doppia elica di Palazzo Sanfelice a Napoli

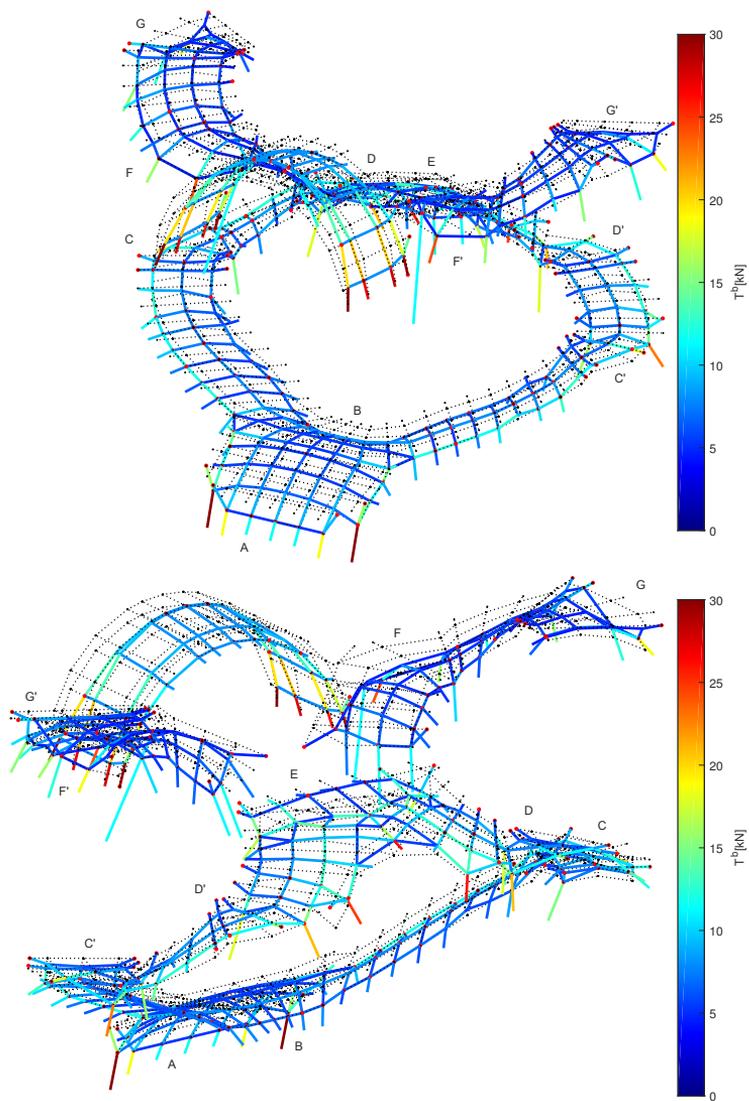


Figura 4.62: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima spinta orizzontale per la rete *Sanfelice*

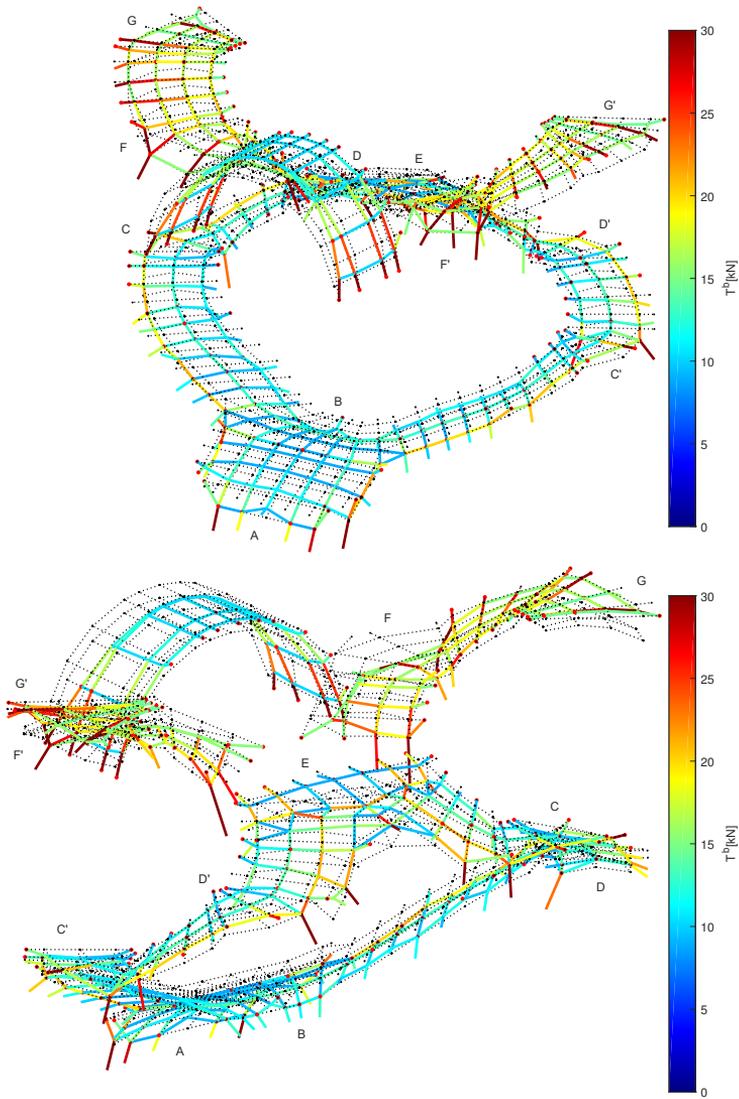


Figura 4.63: Vista tridimensionale delle soluzioni di massima spinta orizzontale per la rete *Sanfelice*

## 4.9 Scala della Riconciliazione del Castello di Graz

Il Castello di Graz è un importante edificio pubblico in stile gotico situato all'interno della parte antica della città austriaca, e attuale sede del Governatore della Stiria. Viene costruito intorno alla metà del XV secolo sotto la guida dell'imperatore del Sacro Romano Impero Federico III, e ampliato successivamente dal figlio Massimiliano I alla fine del XV secolo.



Figura 4.64: Particolare della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz

All'interno del castello si erge una silenziosa meraviglia dell'ingegneria e dell'architettura, una scala a doppia elica che appare come un'illusione agli occhi degli spettatori, cfr. figura 4.64. Realizzata per mano ignota durante la fase di ampliamento del castello, questa peculiare struttura si divide, per poi ricongiungersi più volte a formare dei pianerottoli intermedi, seguendo lo sviluppo di due rampe elicoidali che raggiungono la sommità della torre posta ad un'altezza complessiva di  $8.9\text{ m}$ . Proprio per questo motivo la scala è universalmente conosciuta con il nome di Scala della Riconciliazione, dimostrando, inoltre, un'incredibile resistenza al tempo e all'usura, cfr. figura 4.65.

Sebbene appartenga ad una rara classe di costruzioni, questa non rappresenta l'unico esempio al mondo a possedere tali caratteristiche, infatti una scala simile viene costruita circa cinquant'anni prima all'interno della Cattedrale di Santa Elisabetta a Košice. Ad onore del vero quest'ultima manca della grandezza e della raffinatezza della Scala della Riconciliazione.

Composta da 52 gradini monolitici di altezza pari a  $0.17\text{ m}$ , con sezione approssimativamente triangolare, la Scala della Riconciliazione è caratterizzata da una geometria decisamente complessa, anche se piuttosto regolare. Entrambe

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

le rampe elicoidali possiedono, infatti, un raggio esterno di  $1.2m$  ed un raggio interno di  $0.15m$ , mentre la distanza tra i due centri di circonferenza che ne caratterizzano la planimetria è di  $1m$ , cfr. figura 4.66.

La rete di spinta ipotizzata per questa scala è composta da 2 serie di rami elicoidali, a loro volta composte da 6 allineamenti longitudinali, da  $A$  ad  $F$  e da  $A'$  a  $F'$ , nonché da 2 serie di rami radiali che vanno a modellare i singoli gradini. I due rami più interni,  $F$  e  $F'$ , corrispondono ai bordi liberi della rete e rappresentano la spinta longitudinale all'interno degli spessi cordoli elicoidali centrali dove terminano internamente i gradini. I rami rimanenti, invece, sono indicativi delle spinte longitudinali trasmesse tra i gradini della scala.



Figura 4.65: Ulteriore particolare della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz

In corrispondenza dei 3 pianerottoli comuni nei quali confluiscono le due eliche, i 4 rami longitudinali esterni da  $A$  a  $D$  e da  $A'$  a  $D'$  convergono sul ramo del cordolo centrale di sostegno  $G$ .

La porzione di rete utilizzata per modellare ciascun pianerottolo è composta dai rami longitudinali  $E$ ,  $F$ ,  $E'$  e  $F'$ , che completano lo sviluppo elicoidale delle due rampe, nonché dal ramo relativo al cordolo di sostegno  $G$  che collega le due

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

pareti opposte della tromba delle scale. I rami longitudinali sono collegati da rami trasversali diretti lungo la direzione radiale di ogni elica, e rappresentano le spinte all'interno di ogni singolo gradino. Lungo le due eliche questi rami radiali terminano con un segmento esterno che schematizza la reazione vincolare esercitata dalle pareti perimetrali, mentre lungo i pianerottoli comuni terminano, in entrambi i lati, sulle eliche più interne  $F$  e  $F'$ .

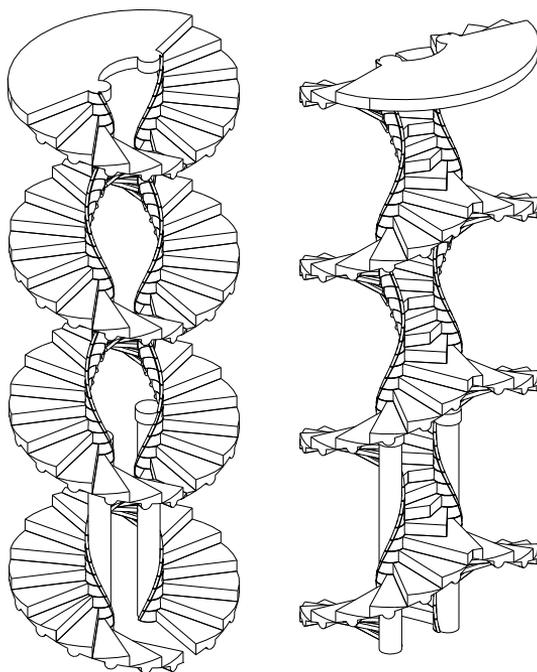


Figura 4.66: Modello tridimensionale della Scala della Riconciliazione del Castello di Graz

I restanti rami longitudinali sono sottoposti a spinte che rimangono approssimativamente costanti, sia lungo la direzione trasversale che lungo quella longitudinale delle eliche. Lo stesso comportamento viene mantenuto anche lungo i rami longitudinali dei 3 pianerottoli, mentre un comportamento differente è

Su ogni ramo della rete viene imposto un valore minimo della spinta di riferimento pari a  $\hat{t}_{h,\min}^{(b)} = 0.1 \text{ kN}$  ed un valore massimo pari a  $\hat{t}_{h,\max}^{(b)} = +\infty$ . I carichi verticali  $f_z$ , applicati in direzione dell'ascissa  $z$ , sono calcolati assumendo un peso specifico medio di  $25 \text{ kN/m}^3$ . I limiti per le altezze nodali  $z_{\min}$  e  $z_{\max}$  sono imposti pari alle quote di intradosso e di estradosso della muratura, misurate in direzione verticale.

Le soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale della rete *Graz* soggetta ai soli carichi verticali  $f_z$  sono riportate in figura 4.67. Entrambe evidenziano dei comportamenti qualitativamente simili, dai quali è possibile riconoscere una marcata concentrazione delle spinte all'interno delle due eliche  $F$  e  $F'$ . Questo è indicativo del ruolo svolto dal cordolo elicoidale centrale, che si comporta come un vero e proprio elemento di sostegno per l'intera struttura.

I restanti rami longitudinali sono sottoposti a spinte che rimangono approssimativamente costanti, sia lungo la direzione trasversale che lungo quella longitudinale delle eliche. Lo stesso comportamento viene mantenuto anche lungo i rami longitudinali dei 3 pianerottoli, mentre un comportamento differente è

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

assunto dai rami radiali che modellano i gradini. Allontanandosi dalla zona centrale, si nota un'intensificazione degli sforzi verso l'esterno, sia nella parte superiore che in quella inferiore della scala.

Tale descrizione del comportamento generale a compressione della struttura non può prescindere da un'attenta analisi della porzione di rete individuata dalla figura 4.68, che mostra come questo settore sia soggetto alle stesse spinte longitudinali che si hanno lungo le coppie di rami  $E-E'$  e  $F-F'$ . Qui un ruolo chiave è giocato proprio dai rami che definiscono il cordolo  $G$ , e che sostengono la spinta longitudinale trasmessa dai rami da  $A$  a  $D$  e da  $A'$  a  $D'$ . Questi, a turno, trasmettono queste forze sui corrispettivi del lato opposto, equilibrando perfettamente le spinte interne.

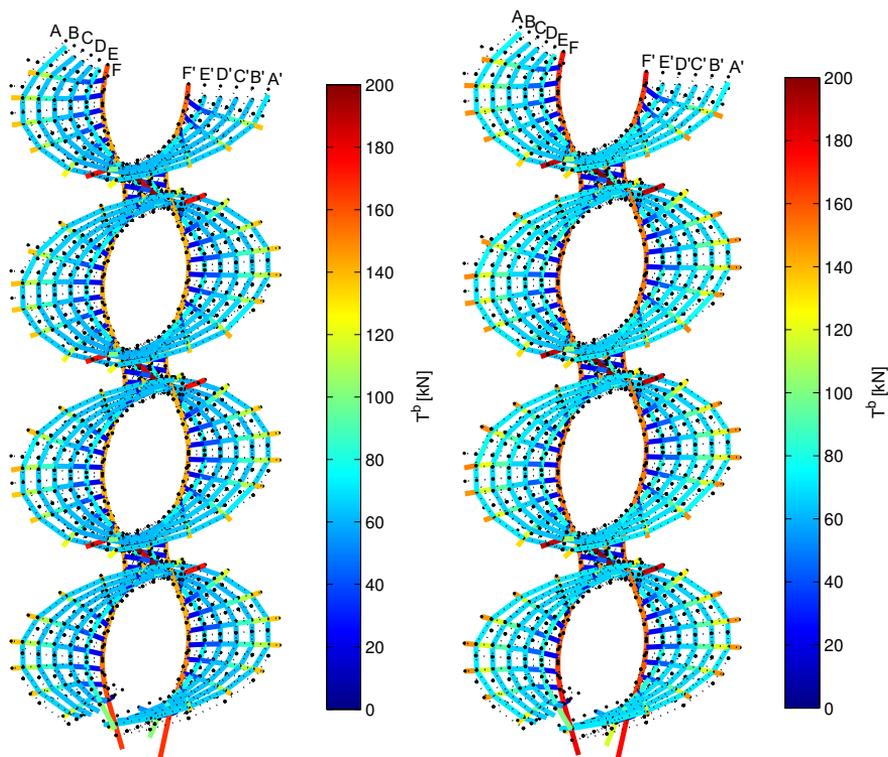


Figura 4.67: Vista tridimensionale delle soluzioni di minima e di massima spinta orizzontale per la rete *Graz*

## Le applicazioni e i risvolti pratici dell'analisi tramite reti di spinta

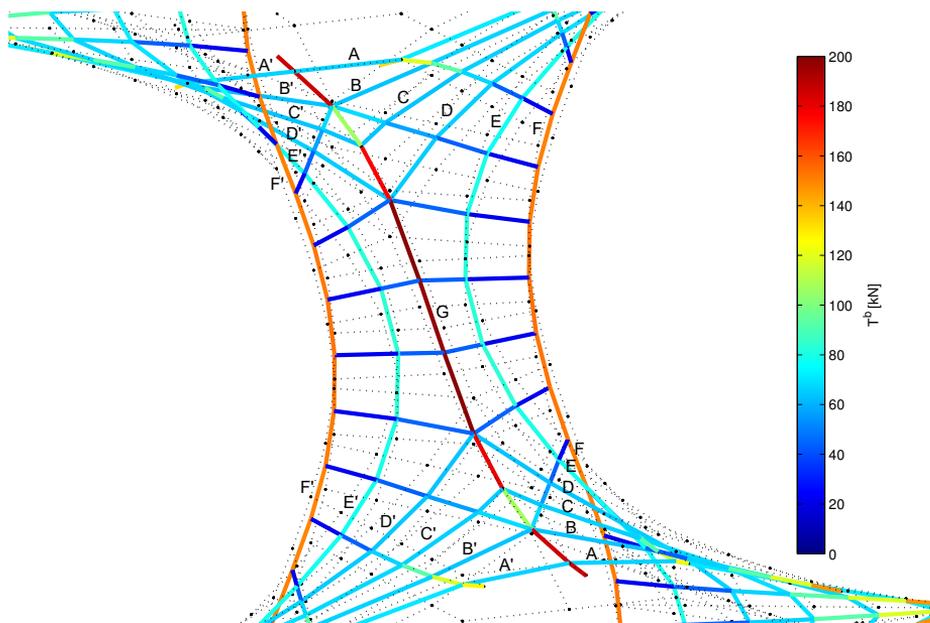


Figura 4.68: Ingrandimento della soluzione di massima spinta orizzontale in corrispondenza della porzione più sollecitata della struttura per la rete *Graz*

# Conclusioni

Nell'ambito del presente lavoro di tesi è stata affrontata la tematica relativa alla verifica di sicurezza delle costruzioni storiche in muratura, caratterizzate da una geometria complessa, mediante il metodo cosiddetto delle Reti di Spinta. Attenzione particolare è stata data alla validazione del metodo finalizzato, altresì, allo studio di strutture sottoposte anche ad azioni orizzontali. Infatti quest'ultimo aspetto, particolarmente importante nelle aree caratterizzate da una rilevante sismicità, è talvolta poco approfondito in letteratura.

L'analisi tramite reti di spinta costituisce la versione attualmente più avanzata di quella che in letteratura scientifica viene denominata Thrust Network Analysis, originariamente formulata da O'Dwyer e successivamente ripresa da Block. Estendendo il principio del poligono funicolare dei carichi allo spazio tridimensionale, il metodo delle reti di spinta si caratterizza per la ricerca di un reticolo spaziale, costituito esclusivamente da ideali aste compresse in equilibrio con i carichi esterni, interamente contenuto nello spessore della copertura.

Il metodo è stato presentato nel dettaglio mediante l'esplicitazione delle equazioni governanti, ed è stata descritta la procedura analitica in grado di estenderne l'applicazione alle reti soggette sia a carichi verticali che orizzontali, anche in presenza di bordi non vincolati.

In relazione a quest'ultimo aspetto è stata dettagliata la procedura che consente di avvalersi del Force Density Method, originariamente formulato da Schek nell'ambito dei problemi di ricerca di forma, nella valutazione delle densità di spinta di riferimento necessarie a calcolare le coordinate orizzontali dei nodi di bordo relativi ai rami non vincolati della rete.

Al fine di illustrare compiutamente l'estensione del metodo all'analisi di reti soggette anche ai carichi orizzontali vengono descritte due procedure iterative, una più generale applicabile all'analisi di tutti i tipi di rete, l'altra, ottimizzata dal punto di vista computazionale, che sfrutta la relazione di linearità tra le forze orizzontali esterne e le spinte nei rami non vincolati.

## Conclusioni

---

I casi di studio presentati successivamente riguardano sia strutture elementari, come ad esempio gli archi, utili per stabilire le giuste corrispondenze tra gli aspetti prettamente teorici e quelli più squisitamente applicativi, sia manufatti più complessi, come volte e cupole in muratura.

Nell'ambito delle strutture voltate, la scelta è ricaduta su tre particolari costruzioni del panorama storico italiano. L'applicazione del metodo delle reti di spinta ha restituito, infatti, risultati significativi per la cupola a pianta circolare della Chiesa di Santa Maria di Monteverginella a Napoli, sottoposta a carichi verticali e orizzontali, anche in ipotesi di rinforzo strutturale tramite applicazione di matrici cementizie fibro-rinforzate.

Altri riscontri positivi sono stati ottenuti su una volta a crociera di Palazzo Camponeschi a L'Aquila, per la quale sono state fatte variare le condizioni al contorno relative alle spinte di riferimento minime nei rami della rete, osservandone la variabilità nelle diverse condizioni di carico. Una ulteriore serie di analisi è stata eseguita sulla peculiare cupola a pianta ellittica della Cattedrale di Santa Maria Assunta a Pisa.

Di particolare interesse sono, inoltre, le applicazioni allo studio dell'equilibrio di scale elicoidali in muratura, che evidenziano la straordinaria capacità del metodo nel descrivere il funzionamento statico di tali manufatti. Tra i molti affascinanti esempi costruiti nel corso dei secoli, caratterizzati da geometrie estremamente audaci, sono state selezionate cinque scale monumentali particolarmente emblematiche.

Nell'ambito del comportamento statico di questo tipo di struttura, senza dubbio una caratteristica peculiare è rappresentata dalla presenza di un pilastro centrale che, lavorando insieme alla parete esterna, sostiene l'intero peso della volta a botte elicoidale che vi si avvolge intorno.

Un perfetto esempio è rappresentato dalla Vite di Saint-Gilles, celebre per la sua incredibile stereotomia. Al fine di validare ulteriormente la robustezza del modello proposto, i risultati ottenuti dall'analisi tramite reti di spinta sono stati confrontati con quelli inerenti all'applicazione, sullo stesso manufatto, del metodo della membrana non reagente a trazione.

La diretta controparte di tale tipologia strutturale è, invece, rappresentata dalle scale elicoidali sprovviste di supporto centrale. In questo caso la struttura è sostenuta generalmente dall'azione statica combinata di un muro esterno e di un cordolo elicoidale posto all'estremità interna dei gradini. In considerazione della grande varietà tipologica di queste particolari costruzioni, non necessariamente questo cordolo interno rappresenta un elemento strutturale distinto; talvolta, infatti, lo si può ricondurre ad una particolare conformazione geometrica del gradino.

Due esempi mirabili sono la scala elicoidale della Certosa di San Lorenzo a Padula, nella quale si riscontra la presenza fondamentale di una balaustra stabilizzante in pietra posta in sommità, e la scala a tripla elica del Convento di San Domingos de Bonaval a Santiago De Compostela, costituita da tre rampe elicoidali simili, del tutto indipendenti tra loro, tanto da poter essere studiate come tre scale separate.

Esempi di costruzioni nelle quali il comportamento strutturale risulta particolarmente audace e complesso sono quelli dell'architettura barocca, con scale composte da più rampe elicoidali interagenti l'una con l'altra. Un famoso esempio di barocco napoletano è rappresentato dalla scala a doppia elica presente all'interno di Palazzo Sanfelice, composta da due rampe elicoidali sostenute dall'azione combinata di un muro esterno e di due pilastri centrali.

Estremamente raro, invece, è il caso di scale composte da rampe elicoidali che interagiscono tra loro senza l'ausilio di colonne centrali, come la celebre Scala della Riconciliazione presente all'interno del Castello di Graz.



# Bibliografia

- [1] D. Aita, R. Barsotti, and S. Bennati. Explicit solutions for depressed masonry arches loaded until collapse. Part I: a one-dimensional nonlinear elastic model. *Meccanica*, 52:989–1001, 2017.
- [2] D. Aita, R. Barsotti, and S. Bennati. Explicit solutions for depressed masonry arches loaded until collapse. Part II: a solution method for statically indeterminate systems. *Meccanica*, 52:1093–1106, 2017.
- [3] V. Alecci, G. Misseri, L. Rovero, G. Stipo, M. De Stefano, L. Feo, and R. Luciano. Experimental investigation on masonry arches strengthened with PBO-FRCM composite. *Composites Part B: Engineering*, 100:228–239, 2016.
- [4] A. Andreu, L. Gil, and P. Roca. Computational analysis of masonry structures with a funicular model. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 133:473–480, 2007.
- [5] M. Angelillo. *Mechanics of masonry structures*. Springer, 2014.
- [6] M. Angelillo. The equilibrium of helical stairs made of monolithic steps. *International Journal of Architectural Heritage*, 10:675–687, 2016.
- [7] M. Angelillo, E. Babilio, and A. Fortunato. Singular stress fields from masonry-like vaults. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25:423–441, 2013.
- [8] M. Angelillo and A. Fortunato. Lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation. *International Journal of Solids and Structures*, 39:6211–6240, 2002.

## Bibliografia

---

- [9] O. Anil, C. Durucan, and S. W. Din. Experimental study on the stress distribution at the interface between CFRP and three different types of masonry units. *Composites Part B: Engineering*, 92:63–73, 2016.
- [10] Alberti L. B. *Trattati di architettura*. Il Polifilo, 1966.
- [11] A. Baratta and I. Corbi. Masonry vaulted staircases: interpretation of equilibrium paths. In *Proceedings of the XI International Conference on Computational Structures Technology, Stirlingshire, Scotland*, 2012.
- [12] A. Baratta and I. Corbi. Equilibrium models for helicoidal laterally supported staircases. *Computers & Structures*, 124:21–28, 2013.
- [13] A. Baratta and O. Corbi. On the equilibrium and admissibility coupling in NT vaults of general shape. *International Journal of Solids and Structures*, 47:2276–2284, 2010.
- [14] A. Baratta and O. Corbi. On the statics of No-Tension masonry-like vaults and shells: solution domains, operative treatment and numerical validation. *Annals of Solids and Structures Mechanics*, 2:107–122, 2011.
- [15] A. Barbieri, A. Di Tommaso, and R. Massarotto. Helical masonry vaulted staircase in Palladio and Vignola’s architectures. In *Proceedings of the I International Congress on Construction History, Madrid, Spain*, 2003.
- [16] W. H. Barlow. On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction. *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 5:162–182, 1846.
- [17] A. Becchi and F. Focè. *Degli archi e delle volte: arte del costruire tra meccanica e stereotomia*. Marsilio, 2002.
- [18] M. Beckmann. *The Columnae Coc(h)lides of Trajan and Marcus Aurelius*. Phoenix, 2002.
- [19] E. Benvenuto. *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Edizioni di Storia e Letteratura, 2006.
- [20] J. B. Bérard. *Statique des voûtes*. Firmin Didot imprimeur-libraire, 1810.
- [21] P. Block. *Thrust network analysis*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2009.

- [22] P. Block and L. Lachauer. Three-dimensional (3D) equilibrium analysis of gothic masonry vaults. *International Journal of Architectural Heritage*, 8:312–335, 2014.
- [23] P. Block and J. Ochsendorf. Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of International Association for Shell and Spatial Structures*, 48:167–173, 2006.
- [24] A. Borri and L. Bussi. *Archi e volte in zona sismica. Meccanica delle strutture voltate*. Doppiavoce, 2011.
- [25] C. Bossut. Nouvelles recherches sur l'équilibre des voûtes en dôme. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1776:587–596, 1776.
- [26] P. Bouguer. Sur le lignes courbes propres a former les voûtes en dôme. *Mémoires de l'Académie Royale de Sciences de Paris*, 1734:149–66, 1734.
- [27] G. A. Breymann. *Trattato generale di costruzioni civili*. Edizioni Di Baio, 1853.
- [28] C. Caggegi, F. G. Carozzi, S. De Santis, F. Fabbrocino, F. Focacci, L. Hojdy, E. Lanoye, and L. Zuccarino. Experimental analysis on tensile and bond properties of PBO and aramid fabric reinforced cementitious matrix for strengthening masonry structures. *Composites Part B: Engineering*, 127:175–195, 2017.
- [29] L. Caleca. *Architettura tecnica*. Dario Flaccovio Editore, 2000.
- [30] J. W. P. Campbell and M. Tutton. *Staircases: history, repair and conservation*. Routledge, 2013.
- [31] A. Castigliano. *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Edizioni Negro, 1879.
- [32] V. Ceradini. Modelli sperimentali di volte in tufo e mattoni. In *Atti del convegno nazionale: La meccanica delle murature tra teoria e progetto, Messina, Italia*, 1996.
- [33] M. Como. *Statics of historic masonry constructions*. Springer, 2016.
- [34] C. A. Coulomb. Memories de mathematique et de physique. *Academie Royal des Sciences par divers sans*, 7:343–382, 1773.

## Bibliografia

---

- [35] P. Couplet. De la poussée des voûtes. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, 79, 1729.
- [36] K. Culmann. *Die graphische statik*. 1866.
- [37] B. F. de Belidor. *La science des ingenieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile*. Jombert, 1739.
- [38] P. De La Hire. *Traité de mécanique, ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts*. Compagnie des Libraires, 1729.
- [39] F. Derand. *L'architecture des voutes*. Sebastien Cramoisy, 1643.
- [40] S. Di Pasquale. *L'arte del costruire: tra conoscenza e scienza*. Marsilio, 1996.
- [41] D. Donghi. *Manuale dell'architetto*. UTET, 1923.
- [42] D. C. Drucker. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. In *Proceedings of the I U.S. National Congress of Applied Mechanics, Chicago, Illinois*, 1952.
- [43] D. C. Drucker and W. Prager. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics*, 10:157–165, 1952.
- [44] H. T. Eddy. *Researches in graphical statics*. Van Nostrand, 1878.
- [45] F. Fabbrocino, I. Farina, V. P. Berardi, A. J. M. Ferreira, and F. Fraternali. On the thrust surface of unreinforced and FRP/FRCM reinforced masonry domes. *Composites Part B: Engineering*, 83:297–305, 2015.
- [46] P. Faccio and P. Foraboschi. Analisi agli stati limite ultimi di volte in muratura con rinforzi in FRP. *L'edilizia*, 5:48–56, 2000.
- [47] G. Fallacara. *Il paradigma stereotomico nell'arte del costruire*. PhD thesis, Politecnico di Bari, 2003.
- [48] P. Foraboschi. Effectiveness of novel methods to increase the FRP-masonry bond capacity. *Composites Part B: Engineering*, 107:214–232, 2016.
- [49] F. Fraternali. A thrust network approach for the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress functions. *Mechanics Research Communications*, 37:198–204, 2010.

- [50] A. F. Frézier. *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voûtes*. Jean-Daniel Doulsseker, 1737.
- [51] C. Gambardella. *L'architettura delle scale: disegno, teoria e tecnica*. SAGEP, 1993.
- [52] J. A. García Ares. Un enfoque para el análisis límite de las escaleras de fábrica helicoidales. In *Proceedings V Congreso Nacional de Historia de la Construcción, Burgos, Spain, 2007*.
- [53] J. A. García Ares. Una nueva solución de equilibrio para el análisis límite de helicoides de fábrica con óculo central como los construidos por Guastavino. In *Actas del VII Congreso Nacional de Historia de La Construcción, Burgos, Spain, 2011*.
- [54] E. M. Gauthey. *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome du Pauthéon françois, et sur le moyens d'y remedier*. Imprimerice de H. L. Perronneau, 1798.
- [55] A. Gesualdo, C. Cennamo, A. Fortunato, G. Frunzio, M. Monaco, and M. Angelillo. Equilibrium formulation of masonry helical stairs. *Meccanica*, 52:1963–1974, 2017.
- [56] A. Giuffrè. *Lecture sulla meccanica delle murature storiche*. Kappa, 1991.
- [57] J. Heyman. The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2:249–279, 1966.
- [58] J. Heyman. *The masonry arch*. Ellis Horwood, 1982.
- [59] J. Heyman. The mechanics of masonry stairs. *WIT Transactions on the Built Environment*, 15:259–265, 1995.
- [60] R. Hooke. A description of helioscopes and some other instruments made by Robert Hooke. *Fellow of the Royal Society London*, 1676.
- [61] S. Huerta. The analysis of masonry architecture: a historical approach. *Architectural Science Review*, 51:297–328, 2008.
- [62] A. Kooharian. Limit analysis of voussoir and concrete arches. In *Proceedings of the American Concrete Institute*, 1953.

## Bibliografia

---

- [63] K. E. Kurrer. The history of the theory of structures: from arch analysis to computational mechanics. *International Journal of Space Structures*, 23:193–197, 2008.
- [64] N. Lepore. *Le volte in muratura: forma e struttura, equilibrio e analisi limite*. PhD thesis, Università degli Studi Roma Tre, 2018.
- [65] P. Little, M. Hough, and E. Mullarkey. Stone cantilever stairs - Inspection and analysis of cantilever stairs. *Structural Engineer*, 87:26–33, 2009.
- [66] M. Lucchesi, M. Silhavy, and N. Zani. Singular equilibrated stress fields for no-tension panels. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, 23:255–265, 2005.
- [67] M. Lucchesi, M. Silhavy, and N. Zani. A new class of equilibrated stress fields for no-tension bodies. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1:503–539, 2006.
- [68] M. Malena, F. Focacci, C. Carloni, and G. De Felice. The effect of the shape of the cohesive material law on the stress transfer at the FRP-masonry interface. *Composites Part B: Engineering*, 110:368–380, 2017.
- [69] H. Maljaee, B. Ghiassi, P. B. Lourenço, and D. V. Oliveira. Moisture-induced degradation of interfacial bond in FRP-strengthened masonry. *Composites Part B: Engineering*, 87:47–58, 2016.
- [70] R. Mark, J. F. Abel, and K. O’Neill. Photoelastic and finite-element analysis of a quadripartite vault. *Experimental Mechanics*, 13:322–329, 1973.
- [71] F. Marmo, D. Masi, and L. Rosati. Thrust network analysis of masonry helical staircases. *International Journal of Architectural Heritage*, 182:828–848, 2018.
- [72] F. Marmo and L. Rosati. Reformulation and extension of the thrust network analysis. *Computers & Structures*, 182:104–118, 2017.
- [73] E. A. W. Maunder. Staircases as cantilevers or arches? A question for limit analysis. *Structural Analysis of Historical Constructions*, pages 569–576, 2005.
- [74] J. C. Maxwell. On reciprocal figures, frames, and diagrams of forces. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 26:1–40, 1870.

- [75] E. Méry. Sur l'équilibre des voûtes en berceau. In *Annales des ponts et chaussées*, 1840.
- [76] P. F. Michon. *Instruction sur la stabilité des voûtes et des murs de revêtement*. Lithographie de l'Ecole d'Application, 1857.
- [77] E. Milani, G. Milani, and A. Tralli. Limit analysis of masonry vaults by means of curved shell finite elements and homogenization. *International Journal of Solids and Structures*, 45:5258–5288, 2008.
- [78] K. Mohrmann. *Lehrbuch der gotischen konstruktionen*. 1890.
- [79] H. Moseley. On a new principle in statics, called the principle of least pressure. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 3:285–288, 1833.
- [80] C. L. Navier. *Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Didot, 1826.
- [81] J. A. Ochsendorf. *Collapse of masonry structures*. PhD thesis, University of Cambridge, 2002.
- [82] D. O'Dwyer. Funicular analysis of masonry vaults. *Computers and Structures*, 73:187–197, 1999.
- [83] D. O'Dwyer and O. Bashorun. Structural assessment of cantilevered stone stairs. 2010.
- [84] N. Persy. *Cours de stabilité des constructions, à l'usage des élèves de l'Ecole d'application de l'Artillerie et du Génie*. Litographie de l'Ecole d'Application, 1834.
- [85] G. Poleni. *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*. Roma, 1748.
- [86] J. V. Poncelet. Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes. *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences*, 35:17, 1852.
- [87] W. Prager. On ideal locking materials. *Transactions of the Society of Rheology*, 1:169–175, 1957.

## Bibliografia

---

- [88] W. Prager. *An introduction to plasticity*. Addison-Wesley, 1959.
- [89] S. Price and H. Rogers. Stone cantilevered staircases. *Structural Engineer*, 83:29–36, 2005.
- [90] A. Pucher. Über den spannungszustand in gekrummten flachen. *Beton und Eisen*, 33:298–304, 1934.
- [91] A. Quinonez, J. Zessin, A. Nutz, and J. Ochsendorf. Small-scale models for testing masonry structures. In *Advanced Materials Research*, 2010.
- [92] W. J. Rankine. On the mathematical theory of the stability of earthwork and masonry. *Journal of the Franklin Institute*, 63:84–85, 1857.
- [93] M. Rossi, C. C. Barentin, T. Van Mele, and P. Block. Experimental study on the behaviour of masonry pavilion vaults on spreading supports. *Structures*, 11:110–120, 2017.
- [94] A. Sacco. *La Certosa di Padula disegnata, descritta e narrata su documenti inediti*. Tipografia dell’Unione Editrice, 1916.
- [95] L. Salimbeni. *Degli archi e delle volte Libri Sei*. Ramanzini, 1787.
- [96] A. Sanjurjo Álvarez. *La escalera de caracol en los tratados de cantería españoles de la Edad Moderna y su presencia en el Patrimonio Construido hispánico: estudio geométrico y constructivo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Madrid, 2015.
- [97] P. Sanpaolesi. Il restauro delle strutture della cupola della Cattedrale di Pisa. *Bollettino d’Arte del Ministero dei Beni e delle Attività Culturali*, 1:199–230, 1959.
- [98] H. Scheffler. *Theorie der gewölbe, futtermauern und eisernen brücken*. 1857.
- [99] H. J. Schek. The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:115–134, 1974.
- [100] S. Serlio. *I sette libri dell’architettura*. Edizioni Forni, 1584.

- [101] S. Sessa, R. Serpieri, and L. Rosati. A continuum theory of through-the-thickness jacketed shells for the elasto-plastic analysis of confined composite structures: Theory and numerical assessment. *Composites Part B: Engineering*, 113:225–242, 2017.
- [102] E. E. Shapiro. *Collapse mechanisms of small-scale unreinforced masonry vaults*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- [103] F. Valvona, J. Toti, V. Gattulli, and F. Potenza. Effective seismic strengthening and monitoring of a masonry vault by using glass fiber reinforced cementitious matrix with embedded fiber bragg grating sensors. *Composites Part B: Engineering*, 113:355–370, 2017.
- [104] T. Van Mele, J. McInerney, M. J. DeJong, and P. Block. Physical and computational discrete modeling of masonry vault collapse. In *Proceedings of the VIII International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions, Wroclaw, Poland*, 2012.
- [105] E. Ventsel and T. Krauthammer. *Thin plates and shells*. CRC Press, 2001.
- [106] E. E. Viollet-le Duc. *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XIe au XVIe siècle*. Morel, 1866.
- [107] E. Winkler. Die lage der stützlinie im gewölbe. *Deutsche Bauzeitung*, 13:117–119, 1879.
- [108] W. Wittmann. Zur theorie der gewölbe. *Zeitschrift für Bauwesen*, 29:61–74, 1879.